第7講　統計的な推測(1)　確率分布と期待値・分散

基　礎　学　習

1　確率変数と確率分布

試行の結果によって値が決まり，各値をとる確率が定まっている変数を ❶［　　］という。❶［　　］のとり得る値とその値をとる確率との対応を ❷［　　］といい，❶［　　］はその ❷［　　］に従うという。

確率変数は大文字X，Yなどで表すことが多い。

確率分布を単に分布ともいう。

確率変数Xについて，$X=a$ となる確率を$P(X=a)$，$a \leqq X \leqq b$ となる確率を$P(a \leqq X \leqq b)$で表す。

確率変数Xのとり得る値が x_1，x_2，…，x_nで，各値をとる確率が$P(X=x_i)=p_i$（$i=1$，2，…，n）であるとき，次が成り立つ。

$$0 \leqq p_i \leqq 1 \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=\sum_{i=1}^{n} p_i=1$$

例　2枚の硬貨を投げるとき，表の出る枚数をXとすると，Xは確率変数である。Xのとり得る値は 0，1，2 である。

$P(X=0)=\dfrac{1}{4}$，$P(X=1)=$ ❸［　　］，$P(X=2)=$ ❹［　　］であるから，

Xの確率分布を表で表すと，右のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\dfrac{1}{4}$	❸［　　］	❹［　　］	1

2　確率変数の期待値

確率変数Xが右の表に示された確率分布に従うとき

X	x_1　x_2　……　x_n	計
P	p_1　p_2　……　p_n	1

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

を確率変数Xの ❺［　　］といい，$E(X)$で表す。

Xの平均ともいう。

例　n 個の数 x_1，x_2，…，x_n が書かれたカードがそれぞれ，f_1，f_2，…，f_n 枚あり，$\sum_{i=1}^{n} f_i=N$ であるとする。

このN枚から1枚取り出し，そのカードに書かれている数をXとすると，Xは確率変数である。

$P(X=x_i)=\dfrac{f_i}{N}$ であるから，Xの期待値$E(X)$は

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{f_i}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_if_i=\frac{1}{N}(x_1f_1+x_2f_2+\cdots\cdots+x_nf_n)$$

である。これは，変量としてみた平均値 $\overline{x}$ と一致している。

カードに書かれた数を変量と考えると，度数の分布は次のようになる。

x	x_1　x_2　……　x_n	計
度数	f_1　f_2　……　f_n	N

x_iの相対度数は $\dfrac{f_i}{N}$

解答　❶ 確率変数　❷ 確率分布　❸ $\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{2}{4}\right)$　❹ $\dfrac{1}{4}$　❺ 期待値

例題 1　［確率変数と確率分布］➡ 1

さいころを 1 回投げるとき，出る目を 4 で割った余りをXとする。Xの確率分布を求め，表で表せ。

解答

Xのとり得る値は，小さい順に 0, ❶$\boxed{}$，❷$\boxed{}$，❸$\boxed{}$である。

$P(X=0)=\frac{1}{6}$

$P(X=$❶$\boxed{})=$❹$\boxed{}$

$P(X=$❷$\boxed{})=$❺$\boxed{}$

$P(X=$❸$\boxed{})=$❻$\boxed{}$

であるから，Xの確率分布は次の表のようになる。

X	0	❶	❷	❸	計
P	$\frac{1}{6}$	❹	❺	❻	1

類題 1　500円硬貨，100円硬貨を 1 枚ずつ投げるとき，表の出た硬貨の金額の和をX円とする。Xの確率分布を求め，表で表せ。

例題 2　［確率変数の期待値］➡ 2

ジョーカーを除いた52枚のトランプから 1 枚を引くとき，A ならば500円，絵札（J，Q，K）ならば100円，5 以上10以下のカードならば50円もらえる。もらえる金額をX円とするとき，Xの期待値を求めよ。

解答

Xの確率分布は次の表のようになる。

X	0	50	100	500	計
P	❼	❽	❾	❿	1

したがって，期待値$E(X)$は

$E(X)=0\times$❼$\boxed{}+50\times$❽$\boxed{}+100\times$❾$\boxed{}+500\times$❿$\boxed{}$

$=$⓫$\boxed{}$

類題 2　1000本のくじの中に 1 等100万円が 1 本，2 等 5 万円が 2 本，3 等 1 万円が10本の当たりくじがある。このくじを 1 本引くときの賞金をX円とするとき，Xの期待値を求めよ。

ヒント

⇔ $X=0$ となるのは 4 の目が出るとき

よって　$P(X=0)=\frac{1}{6}$

例題 1 の答

❶ 1　❷ 2　❸ 3

❹ $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{2}{6}\right)$

❺ $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{2}{6}\right)$　❻ $\frac{1}{6}$

⇔ 52枚の中に，A は 4 枚，絵札は12枚，5 以上10以下のカードは $6\times4=24$（枚）含まれている。

例題 2 の答

❼ $\frac{12}{52}$ $\left(\frac{3}{13}\right)$

❽ $\frac{24}{52}$ $\left(\frac{6}{13}\right)$

❾ $\frac{12}{52}$ $\left(\frac{3}{13}\right)$

❿ $\frac{4}{52}$ $\left(\frac{1}{13}\right)$

⓫ $\frac{1100}{13}$

3　確率変数の分散，標準偏差

変量xについてのデータが右の度数分布表によって表されるとき，このデータから1つの値を取り出したときの値をXとする。x_iの相対度数$\dfrac{f_i}{N}$は$X=x_i$となる確率$P(X=x_i)$に等しいから，xの平均値

x	x_1	x_2	……	x_n	計
度数	f_1	f_2	……	f_n	N

$\bar{x}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\boxed{\textcircled{1}\qquad}$ とXの期待値$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\dfrac{f_i}{N}$は一致する。

変量xの散らばり具合を分散，標準偏差で表したように，確率変数Xについてもその値の散らばりやすさとして分散，標準偏差を考える。

Xが右の表に表された確率分布に従うとき，$E(X)=m$とすると，$(X-m)^2$も確率変数である。

X	x_1	x_2	……	x_n	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1

この$(X-m)^2$の期待値$E((X-m)^2)$を確率変数Xの $\boxed{\textcircled{2}\qquad}$ といい，$V(X)$で表す。$V(X)$の正の平方根$\sqrt{V(X)}$を確率変数Xの $\boxed{\textcircled{3}\qquad\qquad}$ といい，$\sigma(X)$で表す。

$$V(X)=E((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i}$$

$V(X)$について，$V(X)=E(X^2)-m^2$が成り立つ。

例　硬貨を2回投げるとき，表の出る回数Xの確率分布は右の表のようになるから，期待値mは

X	0	1	2	計
P	$\dfrac{1}{4}$	$\boxed{\textcircled{4}\qquad}$	$\dfrac{1}{4}$	1

$$m=E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\boxed{\textcircled{4}\qquad}+2\times\frac{1}{4}=\boxed{\textcircled{5}\qquad}$$

$$V(X)=E((X-m)^2)$$

$$=\left(\boxed{\textcircled{6}\qquad}\right)^2\times\frac{1}{4}+\boxed{\textcircled{7}\qquad}^2\times\boxed{\textcircled{4}\qquad}+\boxed{\textcircled{8}\qquad}^2\times\frac{1}{4}$$

$$=\boxed{\textcircled{9}\qquad}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\boxed{\textcircled{9}\qquad}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4　確率変数の変換

確率変数Xに対して，$a\neq 0$のとき$aX+b$も確率変数である。

$X=x_i$のとき$aX+b=ax_i+b$であるから，$P(aX+b=ax_i+b)=P(X=x_i)$

確率変数$aX+b$の期待値，分散，標準偏差について，次の式が成り立つ。

$E(aX+b)=aE(X)+b$

$V(aX+b)=a^2V(X)$，$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

↔

x	x_1	……	x_n	計
度数	f_1	……	f_n	N
相対度数	$\dfrac{f_1}{N}$	……	$\dfrac{f_n}{N}$	1

↓

X	x_1	……	x_n	計
P	p_1	……	p_n	1

↔ σはギリシャ文字Σ（シグマ）の小文字。

↔ $V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$

$=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2p_i-2mx_ip_i+m^2p_i)$

$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

$+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i$

$=E(X^2)-2m\cdot m+m^2$

$=E(X^2)-m^2$

↔ $V(X)$

$=E(X^2)-m^2$

$=0^2\times\dfrac{1}{4}+1^2\times\dfrac{1}{2}$

$+2^2\times\dfrac{1}{4}-1^2$

$=\dfrac{1}{2}$

↔ Xに対して$aX+b$を考えることを，確率変数の変換という。

↔ 変量xの変換と同様の性質が成り立つ。

解答　❶ x_if_i　❷ 分散　❸ 標準偏差　❹ $\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{2}{4}\right)$　❺ 1　❻ -1　❼ 0　❽ 1　❾ $\dfrac{1}{2}$

例題3　［確率変数の分散, 標準偏差］➡3

右の表に表される確率分布に従う確率変数Xの期待値，分散，標準偏差を求めよ。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

解答

$$E(X)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=\boxed{\,1\,}$$

$$V(X)=E\left(\left(X-\boxed{\,1\,}\right)^2\right)$$

$$=\left(\boxed{\,2\,}\right)^2\times\frac{4}{10}+\boxed{\,3\,}^2\times\frac{3}{10}+\boxed{\,4\,}^2\times\frac{2}{10}+\boxed{\,5\,}^2\times\frac{1}{10}$$

$$=\boxed{\,6\,}\qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\boxed{\,7\,}$$

（別解）　$V(X)=E(X^2)-\boxed{\,1\,}^2$

$$=1^2\times\frac{4}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{2}{10}+4^2\times\frac{1}{10}-\boxed{\,1\,}^2=\boxed{\,8\,}$$

類題3　右の表に表される確率分布に従う確率変数Xの期待値，分散，標準偏差を求めよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

例題4　［確率変数の変換］➡4

さいころを1回投げて，出る目をXとする。このとき，確率変数$Y=2X-3$について，$E(Y)$，$V(Y)$，$\sigma(Y)$をそれぞれ求めよ。

解答

Xの確率分布は，右の表のように表される。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\boxed{\,9\,}$$

$$V(X)=E(X^2)-\left(\boxed{\,9\,}\right)^2$$

$$=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}-\left(\boxed{\,9\,}\right)^2=\boxed{\,10\,}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\boxed{\,11\,}$$

よって，$E(Y)=2E(X)-\boxed{\,12\,}=\boxed{\,13\,}$

$V(Y)=\boxed{\,14\,}V(X)=\boxed{\,15\,}$，$\sigma(Y)=2\sigma(X)=\boxed{\,16\,}$

類題4　1からnまでの数が書かれたカードが1枚ずつあり，この中から1枚を引いたときにカードに書かれた数をXとする。このとき，確率変数$Y=3X+2$，$Z=-6X+5$について，$E(Y)$，$V(Y)$，$\sigma(Y)$，$E(Z)$，$V(Z)$，$\sigma(Z)$をそれぞれ求めよ。

ヒント

↔ $m=E(X)$とすると

$V(X)$

$=E((X-m)^2)$

$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$　……①

$V(X)$

$=E(X^2)-m^2$

$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2$　……②

問題に応じて，①，②式のうち計算しやすい方を使う。$X-m$が整数とならない場合は②の方がよいことが多い。

例題3の答

1　2　2　-1　3　0
4　1　5　2　6　1
7　1　8　1

↔ $P(X=i)=\frac{1}{6}$

（$i=1$，2，…，6）

↔ $\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

例題4の答

9　$\frac{7}{2}$　10　$\frac{35}{12}$
11　$\frac{\sqrt{105}}{6}$　12　3
13　4　14　4　15　$\frac{35}{3}$
16　$\frac{\sqrt{105}}{3}$

5 同時分布

2つの確率変数X, Yのとり得る値がそれぞれx_1, x_2, …, x_mとy_1, y_2, …, y_nで, $P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$とする。このとき, 組$(x_i,\ y_j)$とp_{ij}の対応をX, Yの同時分布という。

X \ Y	y_1	y_2	……	y_n	計
x_1	p_{11}	p_{12}	……	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	……	p_{2n}	p_2
⋮	……	……	……	……	⋮
x_m	p_{m1}	p_{m2}	……	p_{mn}	p_m
計	q_1	q_2	……	q_n	1

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=p_i=P(X=x_i),$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij}=q_j=P(Y=y_j)$$

である。

例 さいころを1回投げる試行について, 次のように値が定まる確率変数X, Yを考える。

出た目が偶数のとき$X=1$, 奇数のとき$X=0$

出た目が3の倍数のとき$Y=1$, 3の倍数でないとき$Y=0$

$X=0$かつ$Y=0$となるのは, 1または5が出るときであるから

$$P(X=0,\ Y=0)=\frac{2}{6}$$

同様にして

$P(X=0,\ Y=1)=$ ❶

$P(X=1,\ Y=0)=$ ❷

$$P(X=1,\ Y=1)=\frac{1}{6}$$

であり, X, Yの同時分布は右の表のようになる。

X \ Y	0	1	計
0	$\frac{2}{6}$	❶	$\frac{1}{2}$
1	❷	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
計	❸	❹	1

⟷ $P(X=x_i,\ Y=y_j)$は$X=x_i$かつ$Y=y_j$となる確率を表す。

⟷ 長方形状の配列(値を並べたもの)で, 第i行, 第j列の要素をa_{ij}で表す。

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{第}\,j\,\text{列} & & \\ & a_{11} & \cdots\downarrow\cdots & a_{1n} \\ \text{第}\,i\,\text{行} & \vdots \longrightarrow & a_{ij} & \vdots \\ & a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{array}$$

⟷ 3つの確率変数X, Y, Zについて

$P(X=x_i,\ Y=y_j,\ Z=z_k)=p_{ijk}$として, X, Y, Zの同時分布を考えることができるが, 表で対応を示すことはできない。

6 確率変数の和と期待値

確率変数X, Yについて,

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

が成り立つ。

例 確率変数X, Yが右の表に表された同時分布に従うとき

X \ Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

$$\begin{aligned} &E(X+Y)\\ &=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+(x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22}\\ &=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})\\ &=x_1p_1+x_2p_2+y_1q_1+y_2q_2\\ &=E(X)+E(Y) \end{aligned}$$

⟷ 確率変数X, Y, Zについて, $X+Y$も確率変数であるから,

$$\begin{aligned} &E(X+Y+Z)\\ &=E((X+Y)+Z)\\ &=E(X+Y)+E(Z)\\ &=E(X)+E(Y)+E(Z) \end{aligned}$$

⟷ $P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$のとき, $P(X=x_i)=p_i$, $P(Y=y_j)=q_j$とおくと

$$\begin{aligned} &E(X+Y)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)p_{ij}\\ &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_ip_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_jp_{ij}\\ &=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\right)\\ &\qquad+\sum_{j=1}^{m}y_j\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\right)\\ &=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+\sum_{j=1}^{m}y_jq_j\\ &=E(X)+E(Y) \end{aligned}$$

解答 ❶ $\frac{1}{6}$ ❷ $\frac{2}{6}$ $\left(\frac{1}{3}\right)$ ❸ $\frac{2}{3}$ ❹ $\frac{1}{3}$

例題 5　［同時分布，確率変数の和と期待値］➡5, 6

赤球 3 個，白球 2 個が入った袋から球を 1 個取り出し，それをもとに戻さずに続けてもう 2 個を同時に取り出す。

確率変数 X，Y をそれぞれ 1 回目に取り出した赤球の個数，2 回目に取り出した白球の個数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　X と Y の同時分布を求め，表で表せ。

(2)　$E(X)$，$E(Y)$ を求めよ。

(3)　$X+Y$ の確率分布を求め，表で表せ。

(4)　$E(X+Y)$ を求め，$E(X)+E(Y)$ と等しいことを示せ。

解答

(1)　X，Y のとり得る値はそれぞれ 0，1 と 0，1，2 であり，X と Y の同時分布は次の表のようになる。

X ＼ Y	0	1	2	計
0	$\frac{1}{5}$	$\boxed{1}$	0	$\boxed{2}$
1	$\boxed{3}$	$\frac{2}{5}$	$\boxed{4}$	$\frac{3}{5}$
計	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	1

(2)　$E(X)=0\times\boxed{2}+1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$

$E(Y)=0\times\boxed{5}+1\times\boxed{6}+2\times\boxed{7}=\boxed{8}$

(3)　$X+Y$ のとり得る値は 0，1，2，3 である。

(1)の同時分布の表より，$X+Y$ の確率分布は次の表のようになる。

$X+Y$	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{5}$	$\boxed{9}$	$\frac{2}{5}$	$\boxed{10}$	1

(4)　(3)より

$E(X+Y)=0\times\frac{1}{5}+1\times\boxed{9}+2\times\frac{2}{5}+3\times\boxed{10}=\boxed{11}$

また(2)より，$E(X)+E(Y)=\frac{3}{5}+\boxed{8}=\boxed{12}$

よって，$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ が成り立つ。

類題 5　赤球 4 個，白球 2 個が入った袋から球を 1 個取り出し，それをもとに戻さずに続けてもう 1 個取り出す。1 回目に取り出した赤球の個数を X 個，2 回目に取り出した白球の個数を Y 個とする。$E(X+Y)$ を求めよ。

ヒント

⇔ $X=0$，$Y=0$ は 1 回目に白球 1 個，2 回目に赤球 2 個を取り出す事象であるから，

$P(X=0,\ Y=0)$

$=\frac{2}{5}\cdot\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{5}$

$X=0$，$Y=1$ は 1 回目に白球 1 個，2 回目に赤球 1 個，白球 1 個を取り出す事象，$X=0$，$Y=2$ は 1 回目に白球 1 個，2 回目に白球 2 個を取り出す事象でこれは起こらない。以下同様に対応する事象を考えて，確率を計算する。

⇔ $P(X+Y=2)$

$=P(X=0,\ Y=2)+P(X=1,\ Y=1)$

$=0+\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

例題 5 の答

1　$\frac{1}{5}$　2　$\frac{2}{5}$

3　$\frac{1}{10}$　4　$\frac{1}{10}$

5　$\frac{3}{10}$　6　$\frac{3}{5}$

7　$\frac{1}{10}$　8　$\frac{4}{5}$

9　$\frac{3}{10}$　10　$\frac{1}{10}$

11　$\frac{7}{5}$　12　$\frac{7}{5}$

≫ 確認問題 ≪

1 1個のさいころを投げるとき，出た目の正の約数の個数をX個とする。Xの確率分布を求め，表で表せ。
⇔ 例題1

2 赤球3個と白球2個が入った袋がある。この袋から同時に球を2個取り出すとき，その中に含まれる赤球の個数をX個とする。Xの期待値を求めよ。⇔ 例題2

3 右の表に表される確率分布に従う確率変数Xの期待値，分散，標準偏差を求めよ。⇔ 例題3

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	1

4 3つの面に1が，2つの面に3が，1つの面に5が書かれた立方体のさいころがある。このさいころを1回投げて，出た数をXとする。このとき，確率変数$Y=6X-5$，$Z=-\frac{1}{3}X+1$について，$E(Y)$，$V(Y)$，$\sigma(Y)$，$E(Z)$，$V(Z)$，$\sigma(Z)$をそれぞれ求めよ。⇔ 例題4

5 赤球1個と白球3個入った袋Aと，赤球2個と白球1個入った袋Bから，同時に球を1個ずつ取り出す。袋Aから取り出された赤球の個数をX個，袋Bから取り出された赤球の個数をY個とするとき，$E(X+Y)$を求めよ。⇔ 例題5

基　本　問　題

1 硬貨を５回投げて表の出る回数Xの確率分布を表で表せ。

2 赤球３個と白球４個の入っている袋から球を３個同時に取り出すとき，取り出した赤球の個数と白球の個数の差Xの確率分布を求め，表で表せ。

3 さいころを２回投げるとき，出た目の差Xの期待値を求めよ。

4 50円硬貨３枚と100円硬貨２枚を同時に投げ，表が出た硬貨の金額の和をX円とするとき，Xの期待値を求めよ。

5 確率変数X，Yはとる値がともに-1，１であり

$$P(X=-1,\ Y=-1)=a,\ P(X=-1,\ Y=1)=b$$
$$P(X=1,\ Y=-1)=2b,\ P(X=1,\ Y=1)=a$$

であるとする。$V(X+Y)=3$のとき，a，bの値を求めよ。

6 袋の中に，１から10の整数のうち１つが書かれたカードが入っており，n が書かれたカードは n 枚 $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$ である。この袋からカードを１枚取り出すとき，取り出したカードに書かれている数をXとする。Xの期待値，分散を求めよ。

7 右の表に表される確率分布に従う確率変数Xについて，次の問いに答えよ。

X	7	14	21	28	35	42	49	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

(1) $Y=\dfrac{X-28}{7}$ とおくとき，$E(Y)$，$V(Y)$を求めよ。

(2) $E(X)$，$V(X)$を求めよ。

8 確率変数Xのとり得る値は 0，1，2 であり，$E(X)=\dfrac{1}{2}$，$V(X)=\dfrac{1}{2}$ である。このとき，Xの確率分布を求め，表で表せ。

9 A，Bがゲームを繰り返し行い優勝を争う。１回のゲームでA，Bが勝つ確率は等しくともに $\dfrac{1}{2}$ であり，先に４勝した方を優勝とする。優勝が決まるまでの試合数をX試合とするとき，Xの期待値を求めよ。

10 赤球２個と白球４個が入った袋から同時に球を３個取り出すとき，次の問いに答えよ。

(1) 取り出した赤球の個数をX個とするとき，$E(X)$，$V(X)$を求めよ。

(2) 取り出した白球の個数をY個とするとき，$E(Y)$，$V(Y)$を求めよ。

応　用　問　題

1　袋の中に赤球2個と白球 $(n-2)$ 個 $(n \geqq 3)$ が入っている。袋から球を1個ずつ続けて取り出していき，初めて赤球が出るまでの回数を X 回とするとき，X の期待値，分散を求めよ。

2　硬貨を n 回投げ，表が出た回数を k 回として $X=3^k$ とする。$E(X)$，$V(X)$ を求めよ。

3　5人がプレゼントを持ち寄って，くじ引きでプレゼント交換をする。自分のプレゼントが当たってしまった人数を X 人とするとき，X の期待値を求めよ。

4　赤球2個と白球3個が入った袋から，続けて3個の球を取り出す。1回目に取り出した球が赤球のときは3点，2回目に取り出した球が赤球のときは2点，3回目に取り出した球が赤球のときは1点がもらえる。このとき，3回の得点の合計 X の期待値を求めよ。

5　0から5までの整数が書かれた6個の球が入っている袋から，球を3個同時に取り出す。取り出した球に書かれた整数の最大値を X とするとき，X の期待値，標準偏差を求めよ。

6　2個のさいころを同時に投げて，出た目を X，Y $(X \leqq Y)$ とする。$E(X^2+Y^2)$ を求めよ。