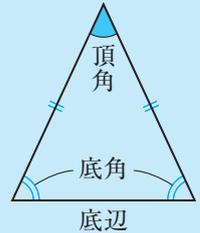


二等辺三角形の性質

学習1 二等辺三角形の性質

- ▶二等辺三角形で、長さの等しい2つの辺の間の角を^{ちうかく}頂角、頂角に対する辺を^{ていへん}底辺、底辺の両端の角を^{ていかく}底角という。
- ▶ことばの意味をはっきりと述べたものを^{ていぎ}定義という。
- ▶証明されたことがらのうちで、大切なものを^{ていり}定理という。図形の性質の証明を考えるときには、まず、その図形の定義を確かめ、定義や定理などを根拠として用いるとよい。
- ▶たとえば、定義や定理の例としては、次のようなものがある。
 定義 二等辺三角形とは、2つの辺が等しい三角形のことである。
 定理 二等辺三角形の底角は等しい。



例題1 右の図の $\triangle ABC$ で、 $AB=AC$ 、点Dは $\angle A$ の二等分線と辺BCとの交点である。このとき、 $\angle B=\angle C$ となることを証明しなさい。

解き方 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ を証明し、 $\angle B=\angle C$ であることを導く。

答 $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において

仮定から $AB=AC$ ……①

ADは $\angle A$ の二等分線だから $\angle BAD=\angle CAD$ ……②

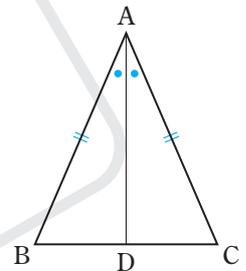
また ADは共通 ……③

①、②、③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

合同な図形の対応する角は等しいから $\angle B=\angle C$

参考 これは、「二等辺三角形の底角は等しい。」という定理の証明である。



確認問題1 次の問いに答えなさい。

□(1) 「二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に2等分する。」という定理を次のように証明した。

[]をうめて証明を完成させなさい。

【証明】 $AB=AC$ の $\triangle ABC$ で、 $\angle A$ の二等分線と辺BCの交点をDとすると、

例題1の証明と同様にして、 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ となる。

よって、合同な図形の対応する辺や角は等しいから

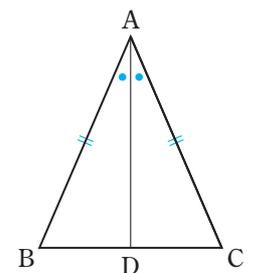
$$BD=[] \text{ ……①} \quad \angle ADB=\angle [] \text{ ……②}$$

また $\angle ADB+\angle []=180^\circ$ ……③

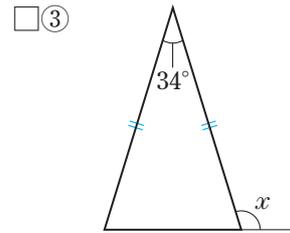
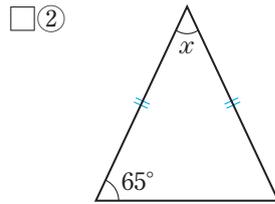
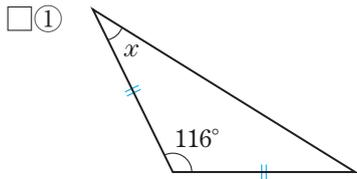
②、③より、 $2\angle ADB=[]^\circ$ であるから $\angle ADB=[]^\circ$

すなわち $AD \perp []$ ……④

①、④より、二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に2等分する。

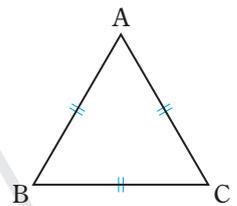


(2) 次の図で、同じ印をつけた辺は等しいとして、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。



学習2 二等辺三角形の性質と証明

例題2 右の図の $\triangle ABC$ で、 $AB=BC=CA$ であるとして、「正三角形の3つの角は等しい。」という定理を証明しなさい。



解き方 正三角形とは、3つの辺が等しい三角形のことである(定義)。このことと、「二等辺三角形の底角は等しい。」という定理を組み合わせる。

答 $CA=CB$ より $\angle A=\angle B$ ……①
 $AB=AC$ より $\angle B=\angle C$ ……②

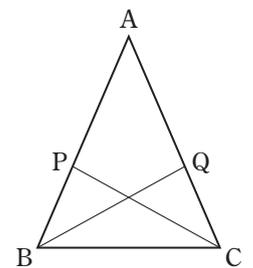
二等辺三角形の底角は等しい。

①、②より、 $\angle A=\angle B=\angle C$ であるから、正三角形の3つの角は等しい。

参考 この証明より、正三角形の1つの角の大きさは、 $180^\circ \div 3 = 60^\circ$ であることもわかる。

確認問題2 次の問いに答えなさい。

□(1) 右の図で、 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形、点P、Qはそれぞれ辺AB、AC上の点で、 $PB=QC$ である。このとき、 $\triangle PBC \equiv \triangle QCB$ であることを次のように証明した。[]をうめて証明を完成させなさい。



【証明】 $\triangle PBC$ と $\triangle QCB$ において

仮定から $PB=[]$ ……①

また BC は共通 ……②

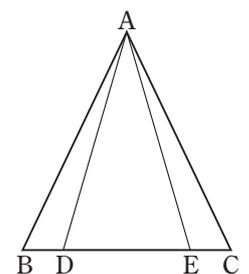
$AB=AC$ より、二等辺三角形の[]は等しいから

$\angle PBC = \angle []$ ……③

①、②、③より、[]がそれぞれ等しいから

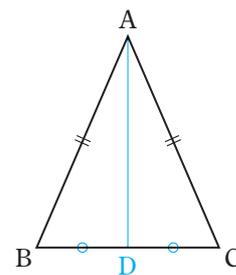
$\triangle PBC \equiv \triangle QCB$

□(2) 右の図で、 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形、点D、Eは辺BC上の点で、 $BD=CE$ である。このとき、 $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ であることを証明しなさい。



練習問題

1 [二等辺三角形の性質①] 右の図の $\triangle ABC$ で、 $AB=AC$ であるとき、 $\angle B=\angle C$ となることを次のように証明した。[]をうめて証明を完成させなさい。 ◀ 例題1



【証明】 辺 BC の中点を D とする。 $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において

仮定から $AB=[\quad]$ ……① $[\quad]=CD$ ……②

また AD は共通 ……③

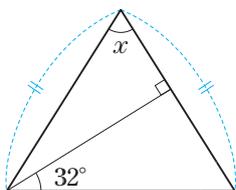
①、②、③より、[]がそれぞれ等しいから

$\triangle [\quad] \equiv \triangle ACD$

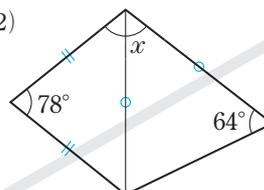
合同な図形の対応する[]は等しいから $\angle B=\angle C$

2 [二等辺三角形の性質②] 次の図で、同じ印をつけた線分の長さは等しいとして、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。 ◀ 例題1

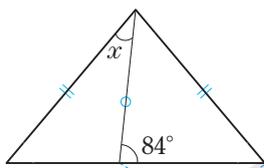
□(1)



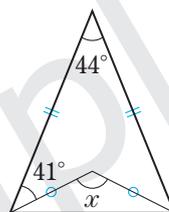
□(2)



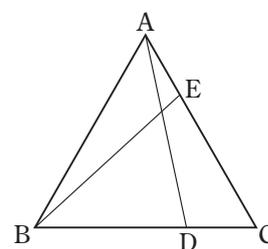
□(3)



□(4)



3 [二等辺三角形の性質と証明①] 右の図の正三角形 ABC で、辺 BC 、 CA 上にそれぞれ点 D 、 E を $CD=AE$ となるようにとる。このとき、 $AD=BE$ となることを次のように証明した。[]をうめて証明を完成させなさい。 ◀ 例題2



【証明】 $\triangle ACD$ と $\triangle BAE$ において

仮定から $CD=[\quad]$ ……①

$\triangle ABC$ は正三角形だから $AC=[\quad]$ ……②

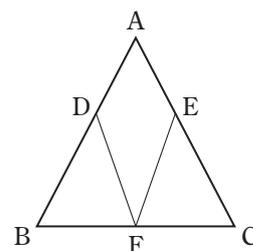
$\angle [\quad] = \angle BAE = 60^\circ$ ……③

①、②、③より、[]がそれぞれ等しいから

$\triangle ACD \equiv \triangle [\quad]$

合同な図形の対応する[]は等しいから $AD=BE$

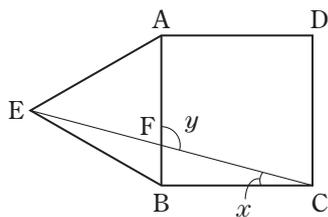
4 [二等辺三角形の性質と証明②] 右の図の $\triangle ABC$ で、 $AB=AC$ 、点 D 、 E はそれぞれ辺 AB 、 AC 上の点で、 $DB=EC$ である。また、点 F は辺 BC の中点である。このとき、 $DF=EF$ であることを証明しなさい。 ◀ 例題2



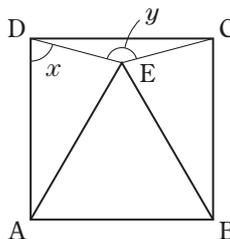
■ 応用問題 ■

1 次の図で、四角形 ABCD は正方形、 $\triangle ABE$ は正三角形である。 $\angle x$ 、 $\angle y$ の大きさをそれぞれ求めなさい。

□(1)

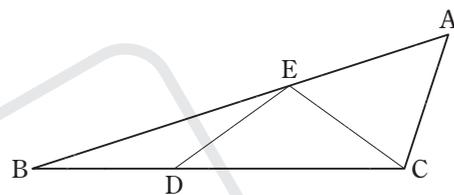


□(2)



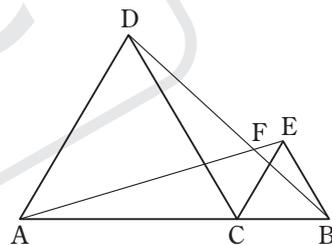
2 右の図の $\triangle ABC$ で、D は辺 BC 上の点、E は辺 AB 上の点で、

□ $BD=DE=EC=CA$ である。 $\angle BCA=108^\circ$ のとき、 $\angle BAC$ の大きさを求めなさい。



3 右の図で、点 C は線分 AB 上の点、 $\triangle ACD$ と $\triangle CBE$ はともに正三角形であり、点 F は線分 AE と BD の交点である。このとき、次の問いに答えなさい。

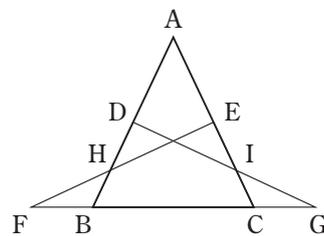
□(1) $\triangle ACE \cong \triangle DCB$ であることを証明しなさい。



難 □(2) $\angle AFB$ の大きさを求めなさい。

4 右の図の $\triangle ABC$ で、 $AB=AC$ 、点 D、E はそれぞれ辺 AB、AC の中点である。

□ 点 F、B、C、G は一直線上にあり、 $FB=GC$ で、点 H、I はそれぞれ辺 AB と線分 EF、辺 AC と線分 DG との交点である。このとき、 $\angle BHF = \angle CIG$ であることを証明しなさい。



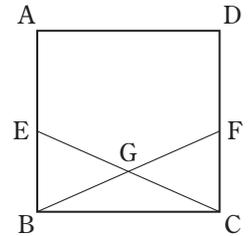
二等辺三角形になるための条件、 直角三角形の合同

学習1 二等辺三角形になるための条件

▶定理 三角形の2つの角が等しければ、その三角形は、等しい2つの角を底角とする二等辺三角形である。



例題1 右の図の四角形 ABCD は正方形で、点 E、F はそれぞれ辺 AB、DC 上にあり、点 G は線分 BF と CE との交点である。BE=CF のとき、 $\triangle GBC$ は二等辺三角形であることを証明しなさい。



解き方 上に示した定理を利用するために、2つの角が等しいことを導く。そのために、まず、三角形の合同を証明する。

答 $\triangle EBC$ と $\triangle FCB$ において

仮定から $EB=FC$ ……①

また BC は共通 ……②

四角形 ABCD は正方形だから $\angle EBC=\angle FCB=90^\circ$ ……③

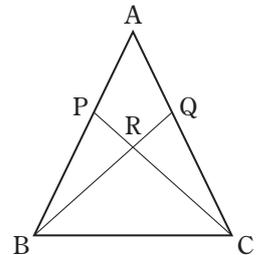
①、②、③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle EBC \equiv \triangle FCB$

合同な図形の対応する角は等しいから $\angle ECB=\angle FBC$ つまり $\angle GCB=\angle GBC$

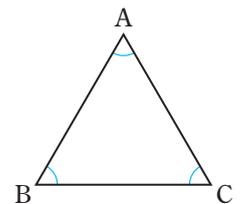
2つの角が等しいから、 $\triangle GBC$ は二等辺三角形である。

確認問題1 次の問いに答えなさい。

□(1) 右の図の $\triangle ABC$ は、 $AB=AC$ の二等辺三角形で、点 P、Q はそれぞれ辺 AB、AC 上にあり、点 R は線分 BQ と CP との交点である。BP=CQ のとき、 $\triangle RBC$ は二等辺三角形であることを証明しなさい。



□(2) 右の図の $\triangle ABC$ で、 $\angle A=\angle B=\angle C$ であるとして、「3つの角が等しい三角形は正三角形である。」という定理を次のように証明した。[]をうめて証明を完成させなさい。



【証明】 $\angle B=\angle C$ より、 $\triangle ABC$ は $\angle B$ 、 \angle [] を底角とする二等辺三角形であるから $AB=[]$ ……①

$\angle C=\angle$ [] より、 $\triangle ABC$ は $\angle C$ 、 \angle [] を底角とする二等辺三角形でもあるから [] =BA ……②

①、②より $AB=[]=CA$ であるから、 $\triangle ABC$ は正三角形である。

学習2 ことがらの逆

▶あることがらの仮定と結論を入れかえたものを、そのことがらの逆^{ぎやく}という。つまり、「○ならば△」の逆は、「△ならば○」である。正しいことがらの逆はいつでも正しいとはかぎらない。

例題2 次のことがらの逆を答え、それが正しいときは○を書きなさい。また、正しくないときには×を書き、反例^{はんれい}をあげなさい。

- (1) $\triangle ABC$ で、 $\angle A=90^\circ$ ならば $\angle B+\angle C=90^\circ$ (2) $a>1$ ならば $a^2>1$

解き方 (1) $\angle B+\angle C=90^\circ$ のとき、 $\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$ となり、逆は正しい。

答 $\triangle ABC$ で、 $\angle B+\angle C=90^\circ$ ならば $\angle A=90^\circ$ 、○

(2) 逆は「 $a^2>1$ ならば $a>1$ 」たとえば、 $a=-2$ のとき、 $a^2>1$ だが、 $a>1$ ではないから逆は正しくない。このように、あることがらの仮定にあてはまるもののうち、結論が成り立たない例を反例という。
答 $a^2>1$ ならば $a>1$ 、× 反例… $a=-2$ のとき、 $a^2>1$ であるが、 $a>1$ ではない。

確認問題2 次のことがらの逆を答え、それが正しいときは○を書きなさい。また、正しくないときには×を書き、反例をあげなさい。

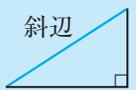
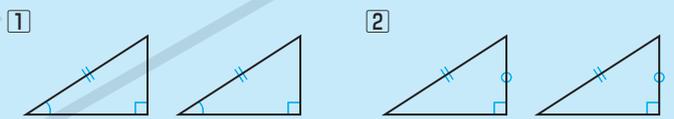
□(1) $x\geq 1$ ならば $x>0$

□(2) $\triangle ABC$ で、 $\angle B=\angle C$ ならば $AB=AC$

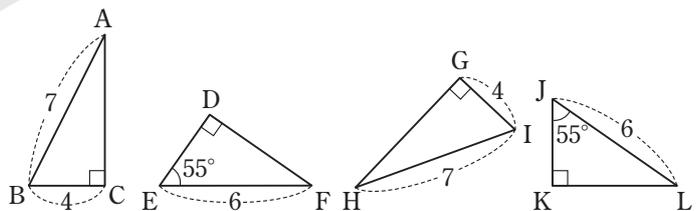
学習3 直角三角形の合同条件

▶直角三角形で、直角に対する辺を斜辺^{しゃへん}という。2つの直角三角形は、次のどちらかが成り立つとき合同である。

- ① 斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい。
② 斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい。



例題3 右の図で、合同な三角形はどれとどれか、記号 \equiv を使って表しなさい。また、そのときに使った合同条件を書きなさい。



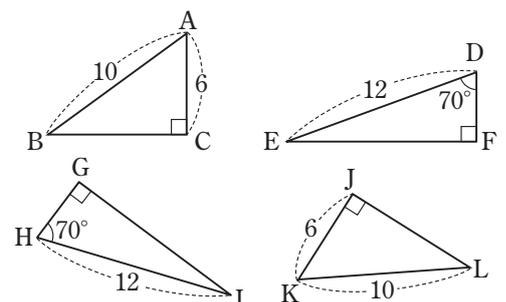
解き方 $\triangle ABC$ と $\triangle HIG$ で、 $\angle C=\angle G$

$=90^\circ$ 、 $AB=HI=7$ 、 $BC=IG=4$ $\triangle DEF$ と $\triangle KJL$ で、 $\angle D=\angle K=90^\circ$ 、 $EF=JL=6$ 、 $\angle E=\angle J=55^\circ$

答 $\triangle ABC\equiv\triangle HIG$ 直角三角形で、斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい。

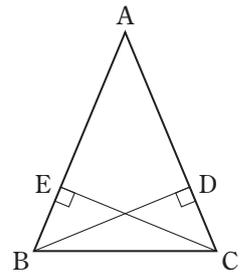
$\triangle DEF\equiv\triangle KJL$ 直角三角形で、斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい。

確認問題3 右の図で、合同な三角形はどれとどれか。記号 \equiv を使って表しなさい。また、そのときに使った合同条件を書きなさい。



学習4 直角三角形の合同

例題 4 右の図の $\triangle ABC$ は、 $AB=AC$ の二等辺三角形である。点B、Cから辺AC、ABに垂線をひき、辺AC、ABとの交点をそれぞれD、Eとすると、 $BD=CE$ であることを証明しなさい。



解き方 BD 、 CE をふくむ直角三角形 DBC 、 ECB の合同を証明する。斜辺が等しいことを確認したうえで、どの合同条件が使えるかを考える。

答 $\triangle DBC$ と $\triangle ECB$ において

$$BD \perp AC, CE \perp AB \text{ より } \angle BDC = \angle CEB = 90^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また } BC \text{ は共通 } \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$AC = AB \text{ より } \angle ACB = \angle ABC \text{ つまり } \angle DCB = \angle ECB \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

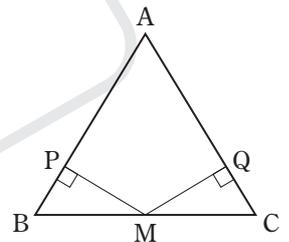
$\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より、直角三角形で、斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから

$$\triangle DBC \equiv \triangle ECB$$

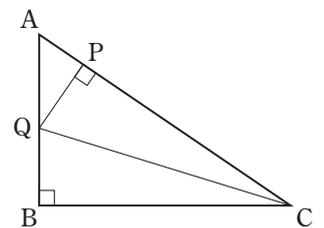
合同な図形の対応する辺は等しいから $BD=CE$

確認問題 4 次の問いに答えなさい。

□(1) 右の図の $\triangle ABC$ は、 $AB=AC$ の二等辺三角形で、点Mは辺BCの中点である。点Mから辺AB、ACに垂線をひき、辺AB、ACとの交点をそれぞれP、Qとすると、 $PB=QC$ であることを証明しなさい。

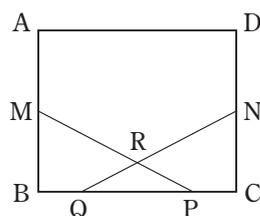


□(2) 右の図の $\triangle ABC$ は、 $\angle B=90^\circ$ の直角三角形である。辺AC上に点Pを、 $BC=PC$ となるようにとり、点Pを通り、辺ACに垂直な直線と辺ABとの交点をQとする。このとき、直線CQは $\angle ACB$ の二等分線であることを証明しなさい。



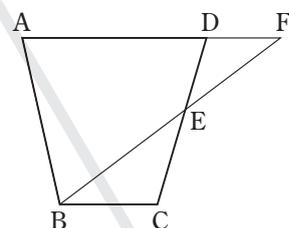
練習問題

- 1 [二等辺三角形になるための条件①] 右の図の四角形 ABCD は長方形で、点 M、N はそれぞれ辺 AB、DC の中点である。辺 BC 上に点 P、Q を線分 MP、NQ が交わるようにとり、その交点を R とする。BP=CQ のとき、 $\triangle RQP$ は二等辺三角形であることを証明しなさい。



↩ 例題 1

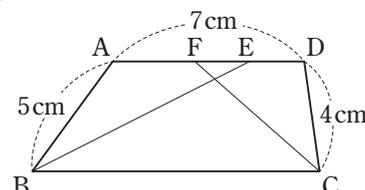
- 2 [二等辺三角形になるための条件②] 右の図の四角形 ABCD は $AD \parallel BC$ の台形で、点 E は辺 DC 上にあり、 $BC=CE$ である。直線 BE と AD との交点を F とするとき、 $\triangle DEF$ は二等辺三角形であることを次のように証明した。[] をうめて証明を完成させなさい。



↩ 例題 1

【証明】 対頂角は等しいから $\angle DEF = \angle [\quad]$ ……①
 $CE=CB$ より $\angle CEB = \angle [\quad]$ ……②
 $AF \parallel BC$ より、平行線の錯角は等しいから $\angle [\quad] = \angle DFE$ ……③
 ①、②、③から $\angle DEF = \angle [\quad]$
 よって、[] が等しいから、 $\triangle DEF$ は二等辺三角形である。

- 3 [二等辺三角形になるための条件③] 右の図で、四角形 ABCD は $AD \parallel BC$ の台形、E は $\angle ABC$ の二等分線と辺 AD との交点、F は $\angle BCD$ の二等分線と辺 AD との交点である。線分 FE の長さを求めなさい。



↩ 例題 1

- 4 [ことがらの逆] 次のことがらの逆を答え、それが正しいときは○を書きなさい。また、正しくないときには×を書き、反例をあげなさい。

↩ 例題 2

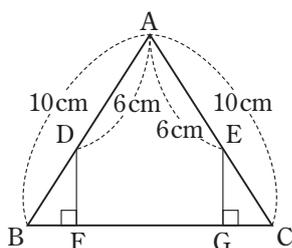
(1) a も b も正の数 ならば ab は正の数

(2) 正三角形の 3 つの角は等しい。

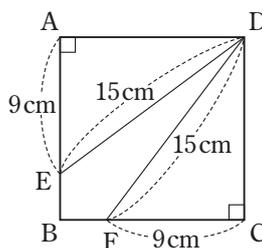
- 5 [直角三角形の合同条件] 次の図で、合同な三角形はどれとどれか。記号 \cong を使って表しなさい。また、そのときに使った合同条件を書きなさい。

↩ 例題 3

(1)

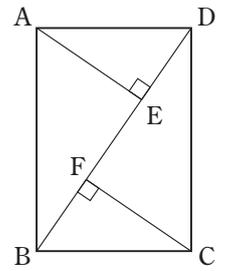


(2)



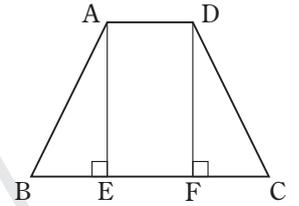
6 [直角三角形の合同①] 右の図の四角形 ABCD は長方形である。点 A、C から対角線 BD にそれぞれ垂線 AE、CF をひく。このとき、 $DE=BF$ であることを証明しなさい。

◀ 例題 4



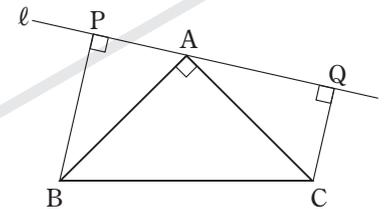
7 [直角三角形の合同②] 右の図の四角形 ABCD は、 $AD \parallel BC$ 、 $AB=DC$ の台形である。点 A、D から辺 BC にそれぞれ垂線 AE、DF をひく。このとき、 $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ であることを証明しなさい。

◀ 例題 4



8 [直角三角形の合同③] 右の図のような、 $\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形 ABC の頂点 A を通る直線 l に、点 B、C からそれぞれ垂線 BP、CQ をひく。このとき、 $BP=AQ$ となることを次のように証明した。[] をうめて証明を完成させなさい。

◀ 例題 4



【証明】 $\triangle ABP$ と $\triangle CAQ$ において

$$l \perp BP, l \perp CQ \text{ より } \angle APB = \angle [\quad] = 90^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\triangle ABC \text{ は } \angle A=90^\circ \text{ の直角二等辺三角形だから } AB = [\quad] \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \text{また } \angle BAP &= 180^\circ - (\angle BAC + \angle [\quad]) \\ &= 180^\circ - (90^\circ + \angle [\quad]) = 90^\circ - \angle [\quad] \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle CAQ \text{ で } \angle ACQ &= 180^\circ - (\angle [\quad] + \angle CAQ) \\ &= 180^\circ - ([\quad]^\circ + \angle CAQ) = [\quad]^\circ - \angle CAQ \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ から } \angle BAP = \angle [\quad] \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

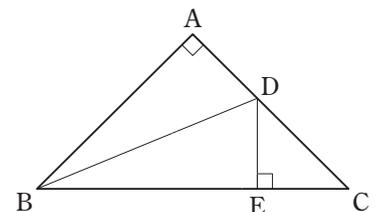
$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{5}$ より、直角三角形で、[] がそれぞれ等しいから

$$\triangle [\quad] \cong \triangle CAQ$$

合同な図形の対応する [] は等しいから $BP=AQ$

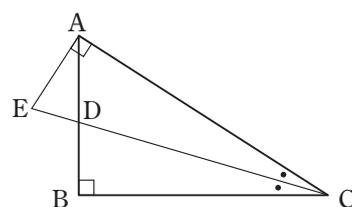
9 [直角三角形の合同④] 右の図の $\triangle ABC$ は、 $\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形である。 $\angle ABC$ の二等分線が辺 AC と交わる点を D とし、点 D から辺 BC に垂線 DE をひく。図の中で、長さの等しい線分をすべて答えなさい。

◀ 例題 4

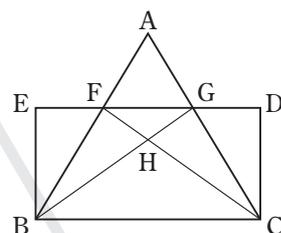


■ 応用問題 ■

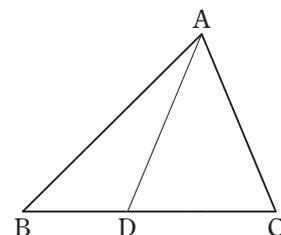
- 1 右の図の $\triangle ABC$ は $\angle B=90^\circ$ の直角三角形で、点Dは $\angle C$ の二等分線と辺ABとの交点、点Eは点Aを通り辺ACに垂直な直線と直線CDとの交点である。このとき、 $AD=AE$ であることを証明しなさい。



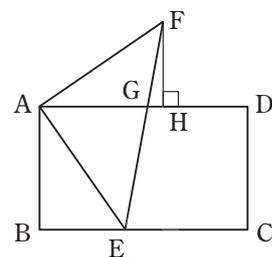
- 2 右の図の $\triangle ABC$ は、 $AB=AC$ の二等辺三角形、四角形BCDEは長方形である。
 辺AB、ACと辺EDとの交点をそれぞれF、G、線分BGとCFとの交点をHとするとき、 $\triangle HGF$ は二等辺三角形であることを証明しなさい。



- 3 右の図で、Dは $\triangle ABC$ の辺BC上の点で、 $\angle CAD=2\angle BAD$ 、 $AD=AC$ である。
 $AB=15\text{cm}$ 、 $CD=8\text{cm}$ のとき、 $\triangle ABD$ の面積を求めなさい。



- 4 右の図で、四角形ABCDは長方形、 $\triangle AEF$ は $\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形であり、点Gは辺ADとEFとの交点である。点Fから辺ADに垂線FHをひくとき、次の問いに答えなさい。



- (1) $\triangle ABE \equiv \triangle AHF$ であることを証明しなさい。

- (2) $AB=6\text{cm}$ 、 $BE=4\text{cm}$ のとき、線分GHの長さを求めなさい。

平行四辺形の性質

学習1 平行四辺形の性質

- ▶ 四角形の向かい合う辺を^{たいへん}対辺、向かい合う角を^{たいかく}対角という。
- ▶ 定義 平行四辺形とは、2組の対辺がそれぞれ平行な四角形のことである。
上の平行四辺形の定義から、次の性質を導くことができる。
- ▶ 定理 ① 平行四辺形では、2組の対辺はそれぞれ等しい。
② 平行四辺形では、2組の対角はそれぞれ等しい。
③ 平行四辺形では、対角線はそれぞれの中点で交わる。

※ 平行四辺形 ABCD を $\square ABCD$ と書くことがある。

例題 1 「平行四辺形では、2組の対辺はそれぞれ等しい。」という定理を証明しなさい。

解き方 $\square ABCD$ で、 $AB \parallel DC$ 、 $AD \parallel BC$ を仮定として、 $AB=DC$ 、 $AD=BC$ を導く。

答 $\square ABCD$ において、対角線 BD をひく。

$\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ において

BD は共通 ……①

平行線の錯角は等しいから

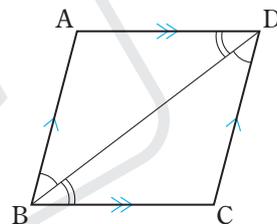
$AB \parallel DC$ より $\angle ABD = \angle CDB$ ……②

$AD \parallel BC$ より $\angle ADB = \angle CBD$ ……③

①、②、③より、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$

合同な図形の対応する辺は等しいから $AB=CD$ 、 $AD=CB$

したがって、平行四辺形では、2組の対辺はそれぞれ等しい。



参考 $\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ において、②、③より、残りの角も等しいので、 $\angle A = \angle C$ がいえる。同じような方法で、 $\angle B = \angle D$ もいえるので、「平行四辺形では、2組の対角はそれぞれ等しい。」ことがいえる。

確認問題 1 次の問いに答えなさい。

□(1) 「平行四辺形では、対角線はそれぞれの中点で交わる。」という定理を、**例題 1**の結果を利用して、次のように証明した。[]をうめて証明を完成させなさい。

【証明】 $\square ABCD$ の対角線の交点を O とする。

$\triangle OAB$ と \triangle [] において

例題 1の結果より、平行四辺形の対辺はそれぞれ等しいから

$AB =$ [] ……①

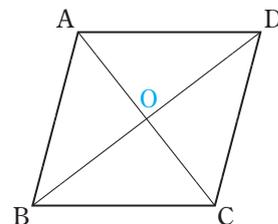
[] $\parallel DC$ より、平行線の錯角は等しいから

$\angle OAB = \angle$ [] ……② $\angle OBA = \angle$ [] ……③

①、②、③より、[] がそれぞれ等しいから $\triangle OAB \equiv \triangle$ []

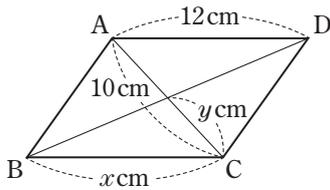
合同な図形の対応する辺は等しいから $OA =$ []、[] $= OD$

したがって、平行四辺形では、対角線はそれぞれの中点で交わる。

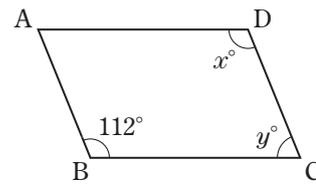


(2) 次の図の□ABCDで、 x 、 y の値をそれぞれ求めなさい。

□①

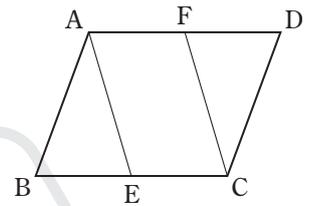


□②



学習2 平行四辺形の性質を利用した証明

例題2 右の図の□ABCDで、点E、Fはそれぞれ辺BC、AD上にあり、 $BE=DF$ である。このとき、 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ であることを証明しなさい。



解き方 平行四辺形の性質を利用して、等しい辺や角を見つける。

答 $\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ において

仮定から $BE=DF$ ……①

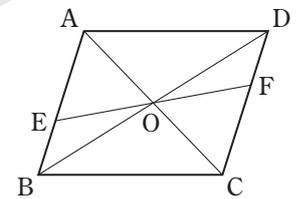
平行四辺形の対辺はそれぞれ等しいから $AB=CD$ ……②

平行四辺形の対角はそれぞれ等しいから $\angle ABE = \angle CDF$ ……③

①、②、③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABE \cong \triangle CDF$

確認問題2 次の問いに答えなさい。

□(1) 右の図の□ABCDで、対角線の交点Oを通る直線と辺AB、CDとの交点をそれぞれE、Fとする。このとき、 $OE=OF$ であることを次のように証明した。



[]をうめて証明を完成させなさい。

【証明】 $\triangle OBE$ と $\triangle ODF$ において

平行四辺形の対角線はそれぞれの[]で交わるから $OB=[]$ ……①

対頂角は等しいから $\angle BOE = \angle []$ ……②

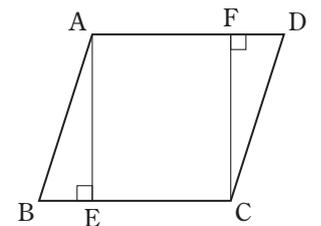
$AB \parallel []$ より、平行線の錯角は等しいから

$\angle OBE = \angle []$ ……③

①、②、③より、[]がそれぞれ等しいから $\triangle OBE \cong \triangle ODF$

合同な図形の対応する[]は等しいから $OE=[]$

□(2) 右の図の□ABCDで、点E、Fはそれぞれ辺BC、AD上にある。 $AE \perp BC$ 、 $CF \perp AD$ のとき、 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ であることを証明しなさい。



練習問題

1 [平行四辺形の性質①] 「平行四辺形では、2組の対角はそれぞれ等しい。」という定理を次のように証明した。

□ [] をうめて証明を完成させなさい。

▶ 例題1

【証明】 □ABCD において、対角線 AC をひく。

平行線の [] は等しいから

AB // DC より $\angle BAC = \angle []$ ……①

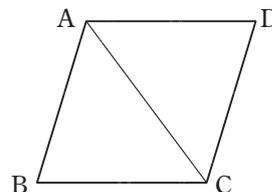
AD // [] より $\angle [] = \angle BCA$ ……②

ここで $\angle BAD = \angle BAC + \angle []$ 、
 $\angle BCD = \angle [] + \angle DCA$ であるから、

①、②から $\angle BAD = \angle []$ つまり $\angle A = \angle C$ ……③

△ABC と △CDA で、①、②より、残りの角も等しいので $\angle B = \angle []$ ……④

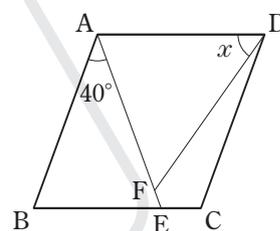
③、④より、平行四辺形では、2組の対角はそれぞれ等しい。



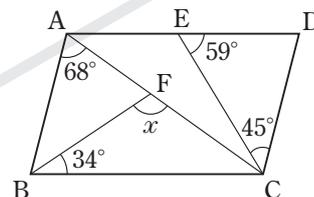
2 [平行四辺形の性質②] 次の問いに答えなさい。

▶ 例題1

□(1) 右の図の□ABCD で、AB=AE、AF=AD のとき、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。

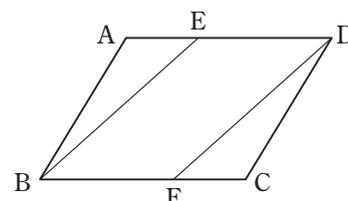


□(2) 右の図の□ABCD で、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。



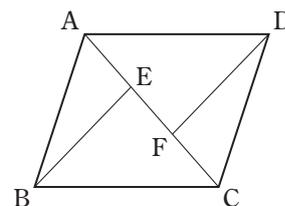
3 [平行四辺形の性質を利用した証明①] 右の図の□ABCD で、点 E、F はそれぞれ辺 AD、BC 上にある。 $\angle ABE = \angle CDF$ のとき、 $BE = DF$ であることを証明しなさい。

▶ 例題2



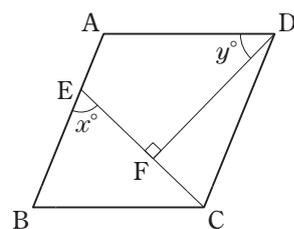
4 [平行四辺形の性質を利用した証明②] 右の図の□ABCD で、点 E、F は対角線 AC 上にあり、 $AE = CF$ である。このとき、 $\triangle BEC \equiv \triangle DFA$ であることを証明しなさい。

▶ 例題2

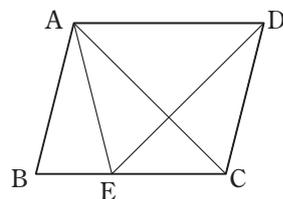


■ 応用問題 ■

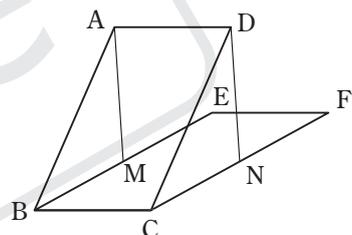
- 1 右の図の□ABCDで、 $CB=CE$ 、 $DF \perp EC$ である。 $\angle CEB = x^\circ$ 、 $\angle ADF = y^\circ$ と
□するとき、 y を x の式で表しなさい。



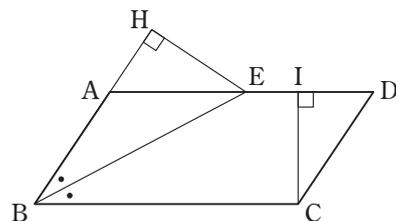
- 難 2 右の図の□ABCDで、点Eは辺BC上の点で、 $AB=AE$ である。このとき、
□ $\triangle AED \equiv \triangle DCA$ であることを証明しなさい。



- 3 右の図の四角形ABCD、EBCFはともに平行四辺形であり、点M、Nはそ
□れぞれ辺EB、FCの中点である。このとき、 $\triangle ABM \equiv \triangle DCN$ であることを
証明しなさい。



- 4 $\angle B < 90^\circ$ である平行四辺形ABCDで、 $\angle B$ の二等分線と辺ADとの交点をEとし、点Eから直線BAに垂線EHをひく。また、点Cから辺ADに垂線CIをひく。このとき、次の問いに答えなさい。



- (1) $\triangle ABE$ は二等辺三角形であることを証明しなさい。

- (2) $\triangle AEH \equiv \triangle DCI$ であることを証明しなさい。

19

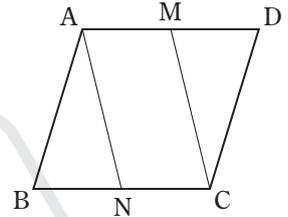
平行四辺形になるための条件

学習1 平行四辺形になるための条件(1)

▶定理 四角形は、次のどれかが成り立てば、平行四辺形である。

- ① 2組の対辺がそれぞれ平行である。……定義
- ② 2組の対辺がそれぞれ等しい。
- ③ 2組の対角がそれぞれ等しい。
- ④ 対角線がそれぞれの中点で交わる。
- ⑤ 1組の対辺が平行でその長さが等しい。

例題1 右の図の□ABCDで、点M、Nはそれぞれ辺AD、BCの中点である。このとき、四角形ANCMは平行四辺形であることを証明しなさい。



解き方 AM//NC、AM=NC を導き、上の⑤を用いる。

答 AD//BC より AM//NC ……①

M、Nはそれぞれ辺AD、BCの中点であるから

$$AM = \frac{1}{2} AD \quad \text{……②} \quad NC = \frac{1}{2} BC \quad \text{……③}$$

平行四辺形の対辺はそれぞれ等しいから

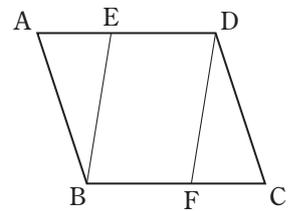
$$AD = BC \quad \text{……④}$$

②、③、④から AM=NC ……⑤

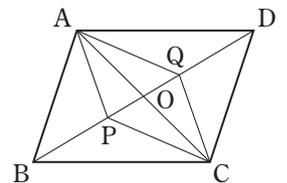
①、⑤より、1組の対辺が平行でその長さが等しいから、四角形ANCMは平行四辺形である。

確認問題1 次の問いに答えなさい。

□(1) 右の図の□ABCDで、点E、Fはそれぞれ辺AD、BC上の点で、AE=CFである。このとき、四角形EBFDは平行四辺形であることを証明しなさい。



□(2) 右の図の□ABCDで、点Oは対角線の交点、点P、Qはそれぞれ線分OB、OD上の点である。BP=DQのとき、四角形APCQは平行四辺形であることを次のように証明した。[]をうめて証明を完成させなさい。



【証明】 平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから

$$OA = [\quad] \quad \text{……①} \quad [\quad] = OD \quad \text{……②}$$

仮定から BP=[] ……③

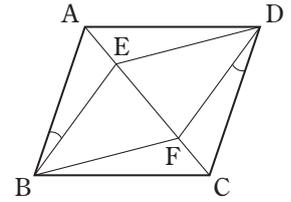
また OP=OB-BP ……④ OQ=[]-[] ……⑤

②、③、④、⑤から []=OQ ……⑥

①、⑥より、[]から、四角形APCQは平行四辺形である。

学習2 平行四辺形になるための条件(2)

例題2 右の図の□ABCDで、対角線AC上に、 $\angle ABE = \angle CDF$ となるように点E、Fをとるとき、四角形EBFDは平行四辺形であることを証明しなさい。



解き方 三角形の合同を利用して、等しい辺や角の関係を導く。

答 $\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ において

平行四辺形の対辺はそれぞれ等しいから $AB = CD$ ……①

仮定から $\angle ABE = \angle CDF$ ……②

$AB \parallel DC$ より、平行線の錯角は等しいから $\angle BAE = \angle DCF$ ……③

①、②、③より、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABE \equiv \triangle CDF$

合同な図形の対応する辺は等しいから $BE = DF$ つまり $EB = DF$ ……④

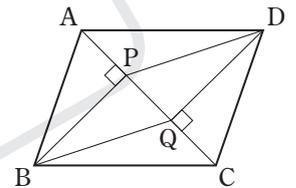
また $\angle BEF = \angle ABE + \angle BAE$ 、 $\angle DFE = \angle CDF + \angle DCF$ ……⑤

よって、②、③、⑤より、 $\angle BEF = \angle DFE$ で、錯角が等しいから $EB \parallel DF$ ……⑥

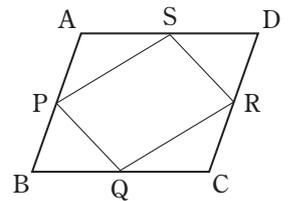
④、⑥より、1組の対辺が平行でその長さが等しいから、四角形EBFDは平行四辺形である。

確認問題2 次の問いに答えなさい。

□(1) 右の図の□ABCDで、対角線AC上に、 $BP \perp AC$ 、 $DQ \perp AC$ となる点P、Qをとるとき、四角形PBQDは平行四辺形であることを証明しなさい。



□(2) 右の図の□ABCDで、点P、Q、R、Sは各辺の中点である。このとき、四角形PQRSは平行四辺形であることを次のように証明した。[]をうめて証明を完成させなさい。



【証明】 $\triangle APS$ と $\triangle CRQ$ において

P、Rはそれぞれ辺AB、DCの中点だから $AP = \frac{1}{2}$ [] ……① $CR = \frac{1}{2}$ DC ……②

平行四辺形の[]はそれぞれ等しいから $AB =$ [] ……③

①、②、③から $AP =$ [] ……④ 同様にして $AS =$ [] ……⑤

平行四辺形の[]はそれぞれ等しいから $\angle PAS = \angle$ [] ……⑥

④、⑤、⑥より、[]がそれぞれ等しいから $\triangle APS \equiv \triangle CRQ$

合同な図形の対応する[]は等しいから [] = RQ ……⑦

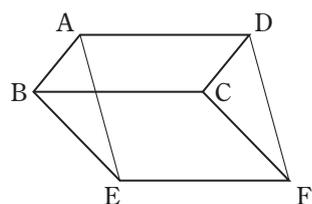
同様にして、 $\triangle BPQ \equiv \triangle DRS$ であることから $PQ =$ [] ……⑧

⑦、⑧より、[]から、四角形PQRSは平行四辺形である。

練習問題

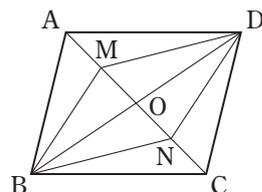
- 1 [平行四辺形になるための条件(1)①] 右の図で、四角形 ABCD、BEFC が平行四
 辺形であるとき、四角形 AEFD は平行四辺形であることを証明しなさい。

↩ 例題1



- 2 [平行四辺形になるための条件(1)②] 右の図の \square ABCD で、点 O は対角線の交点、
 点 M、N はそれぞれ線分 OA、OC の中点である。このとき、四角形 MBND は平行四
 辺形であることを証明しなさい。

↩ 例題1



- 3 [平行四辺形になるための条件(1)③] 次のア～エのうちで、四角形 ABCD がつねに平行四辺形になるものを
 すべて選び、記号で答えなさい。ただし、O は対角線の交点とする。

↩ 例題1

ア $AB \parallel DC$ 、 $AB = DC$

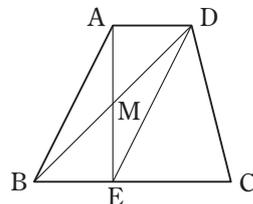
イ $AD \parallel BC$ 、 $AB = DC$

ウ $\angle A = \angle C$ 、 $\angle B = \angle D$

エ $OA = OB$ 、 $OC = OD$

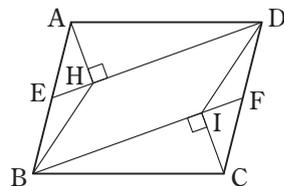
- 4 [平行四辺形になるための条件(2)①] 右の図は、 $AD \parallel BC$ の台形 ABCD で、点 M は
 対角線 BD の中点、点 E は直線 AM と辺 BC との交点である。このとき、四角形 ABED
 は平行四辺形であることを証明しなさい。

↩ 例題2



- 5 [平行四辺形になるための条件(2)②] 右の図で、四角形 ABCD、EBFD は平行四辺
 形である。点 A、C から辺 ED、FB にそれぞれ垂線 AH、CI をひくとき、四角形
 HBID は平行四辺形であることを証明しなさい。

↩ 例題2



■ 応用問題 ■

1 次のア～オのうちで、四角形 ABCD がつねに平行四辺形になるものをすべて選び、記号で答えなさい。ただし、
□ O は対角線の交点とする。

ア $\angle ABD = \angle BDC$ 、 $AB = DC$

イ $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180^\circ$

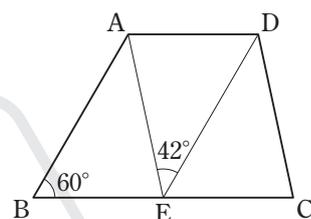
ウ $AC = BD$ 、 $AC \perp BD$

エ $OA = OC$ 、 $AD \parallel BC$

オ $\angle ABD = \angle CBD$ 、 $\angle ADB = \angle CDB$

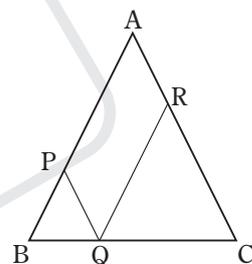
2 右の図の四角形 ABCD は、 $AD \parallel BC$ の台形で、E は辺 BC の中点である。

□ $AB \parallel DE$ 、 $\angle B = 60^\circ$ 、 $\angle AED = 42^\circ$ のとき、 $\angle DCE$ の大きさを求めなさい。



3 右の図の $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形で、点 P、Q、R はそれぞれ辺 AB、BC、AC 上にあり、 $AR = BP$ 、 $AC \parallel PQ$ である。このとき、次の問いに答えなさい。

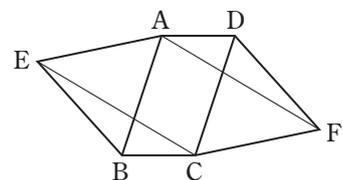
□(1) 四角形 APQR は平行四辺形であることを証明しなさい。



□(2) $PB = 4$ cm、 $RC = 8$ cm のとき、四角形 APQR の周の長さを求めなさい。

難 4 右の図で、四角形 ABCD は平行四辺形、 $\triangle ABE$ 、 $\triangle CDF$ は正三角形である。

□ このとき、四角形 AECF は平行四辺形であることを証明しなさい。



特別な平行四辺形、平行線と面積

学習1 特別な平行四辺形

- ▶定義 長方形とは、4つの角がすべて等しい四角形のことである。
 定義 ひし形とは、4つの辺がすべて等しい四角形のことである。
 定義 正方形とは、4つの角がすべて等しく、4つの辺がすべて等しい四角形のことである。
- ▶長方形、ひし形、正方形は、どれも平行四辺形であり、正方形は、長方形とひし形の両方の性質をもつ。
- ▶対角線の性質 ① 長方形の対角線は等しい。 ② ひし形の対角線は垂直に交わる。

例題1 「長方形の対角線は等しい。」ことを証明しなさい。

解き方 長方形は平行四辺形の性質をもつことに着目し、三角形の合同を利用して証明する。

答 長方形 ABCD で、対角線 AC、BD をひく。

$\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ において

長方形の対辺はそれぞれ等しいから $AB=DC$ ……①

また BC は共通 ……②

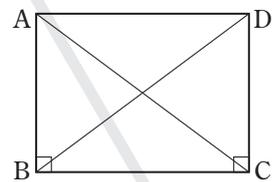
長方形の4つの角はすべて等しいから $\angle ABC=\angle DCB$ ……③

①、②、③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$$

合同な図形の対応する辺は等しいから $AC=DB$

したがって、長方形の対角線は等しい。



確認問題1 「ひし形の対角線は垂直に交わる。」ことを次のように証明した。[]をうめて証明を完成させなさい。

【証明】 ひし形 ABCD で、対角線の交点を O とする。

$\triangle OAB$ と \triangle [] において

ひし形の4つの辺はすべて等しいから [] = AD ……①

また OA は共通 ……②

ひし形の対角線はそれぞれの中点で交わるから $OB=[]$ ……③

①、②、③より、[] がそれぞれ等しいから

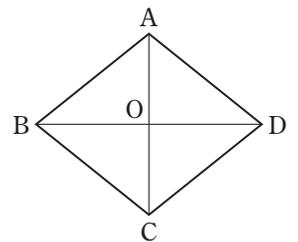
$$\triangle OAB \equiv \triangle []$$

合同な図形の対応する [] は等しいから

$$\angle AOB = \angle []$$

点 B、O、D は一直線上にあるから $\angle AOB = \angle [] = []^\circ$

したがって、ひし形の対角線は垂直に交わる。



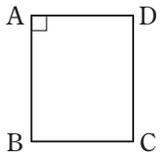
学習2 特別な平行四辺形になるための条件

- ▶「1つの角が直角である」か「対角線が等しい」という条件をみたす平行四辺形は**長方形**になる。
- ▶「となり合う辺が等しい」か「対角線が垂直に交わる」という条件をみたす平行四辺形は**ひし形**になる。
- ▶長方形でもあり、ひし形でもある平行四辺形は**正方形**になる。

例題2 「1つの角が直角である平行四辺形は長方形である。」ことを証明しなさい。

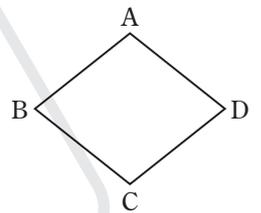
解き方 平行四辺形の対角はそれぞれ等しいことと、内角の和が 360° であることに着目する。

答 $\square ABCD$ で、 $\angle A=90^\circ$ とすると、平行四辺形の対角は等しいから $\angle C=\angle A=90^\circ$ によって $\angle B=\angle D=(360^\circ-90^\circ\times 2)\div 2=90^\circ$ より $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$ 4つの角がすべて等しいから、 $\square ABCD$ は長方形である。
したがって、1つの角が直角である平行四辺形は長方形である。

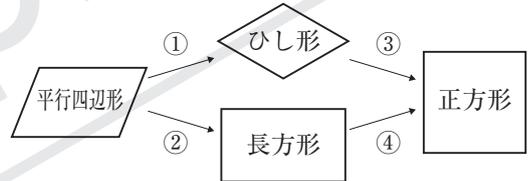


確認問題2 次の問いに答えなさい。

□(1) 右の図の $\square ABCD$ で、 $AB=AD$ であるとして、「となり合う辺が等しい平行四辺形はひし形である。」ことを証明しなさい。



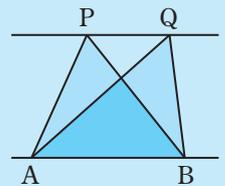
□(2) 平行四辺形に条件を加えて特別な平行四辺形にする過程を示す右の図で、①~④にあてはまるものを、次のア~エの中からそれぞれ2つ選び、記号で答えなさい。



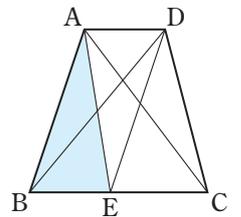
- ア 1つの角が直角である。 イ 対角線が等しい。
ウ となり合う辺が等しい。 エ 対角線が垂直に交わる。

学習3 平行線と面積

- ▶ $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の面積が等しいことを、 $\triangle ABC=\triangle DEF$ と書く。
- ▶底辺を共有し、底辺に平行な直線上に頂点をもつ2つの三角形の面積は等しい。(右の図で、 $PQ\parallel AB$ ならば、 $\triangle PAB=\triangle QAB$ である。)



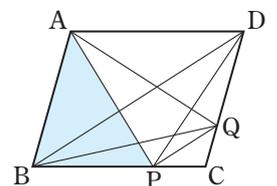
例題3 右の図で、 $AD\parallel BC$ 、 $AB\parallel DE$ であるとき、図の中の三角形のうち、 $\triangle ABE$ と面積が等しい三角形をすべて答えなさい。



解き方 $AD\parallel BC$ より、 $\triangle ABE=\triangle DBE$ $AB\parallel DE$ より、 $\triangle DBE=\triangle DAE$
 $AD\parallel BC$ より、 $\triangle DAE=\triangle DAB=\triangle DAC$

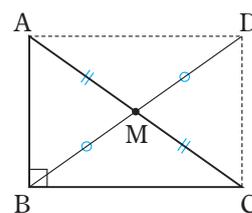
答 $\triangle DBE$ 、 $\triangle DAE$ 、 $\triangle DAB$ 、 $\triangle DAC$

確認問題3 右の図の $\square ABCD$ で、点P、Qはそれぞれ辺BC、CD上の点で、 $PQ\parallel BD$ である。図の中の三角形のうち、 $\triangle ABP$ と面積が等しい三角形をすべて答えなさい。



■ 応用問題 ■

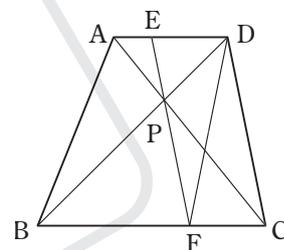
1 $\angle B=90^\circ$ の直角三角形 ABC の斜辺 AC の中点を M とする。また、線分 BM の延長線上に、 $BM=DM$ となる点 D をとる。このとき、次の問いに答えなさい。



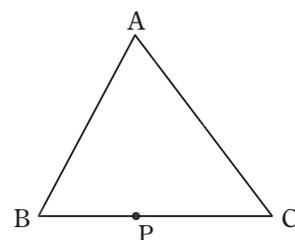
□(1) 四角形 ABCD は長方形であることを証明しなさい。

□(2) (1)の結果を利用して、 $AM=BM=CM$ であることを証明しなさい。

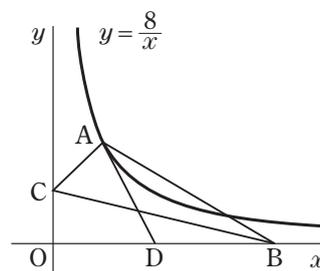
2 右の図で、四角形 ABCD は $AD \parallel BC$ の台形、E、F はそれぞれ辺 AD、BC 上の点で、
□ $EF \parallel DC$ 、また、線分 AC、BD、EF は 1 点 P で交わっている。このとき、
 $\triangle ABP = \triangle DEF$ であることを証明しなさい。



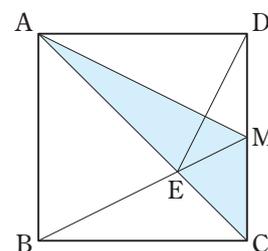
3 右の図の $\triangle ABC$ の辺 BC 上の点 P を通り、 $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する直線 l を
□作図する手順を説明しなさい。



4 右の図で、点 A、B、C はそれぞれ曲線 $y = \frac{8}{x}$ 上、 x 軸上、 y 軸上、点 D は線
□分 OB 上にあり、点 A、B の x 座標はそれぞれ 2、9、点 C の y 座標は 2 である。
 $\triangle ACB = \triangle ADB$ のとき、点 D の座標を求めなさい。



難 5 右の図で、四角形 ABCD は正方形、M は辺 CD の中点、E は対角線 AC と線分 BM と
□の交点で、 $\triangle DEM$ の面積は 4cm^2 である。このとき、 $\triangle ACM$ の面積を求めなさい。



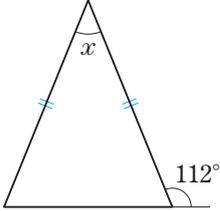
5 章のまとめ

1 二等辺三角形の性質①

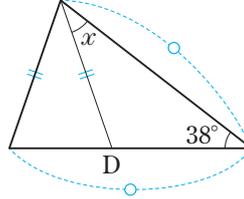
▶教科書 P.128~130

次の図で、同じ印をつけた線分の長さは等しいとして、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。

□(1)



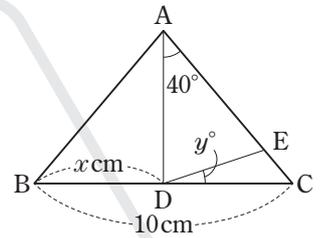
□(2)



2 二等辺三角形の性質②

▶教科書 P.131

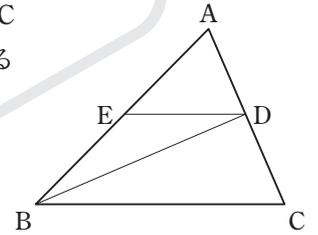
- 右の図で、 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形、 D は $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点、 E は辺 AC 上の点で、 $AD=AE$ である。 $BC=10\text{cm}$ 、 $\angle DAE=40^\circ$ のとき、 x 、 y の値をそれぞれ求めなさい。



3 二等辺三角形になるための条件

▶教科書 P.133~134

- 右の図で、 $\triangle ABC$ の $\angle ABC$ の二等分線と辺 AC との交点を D 、点 D を通過して辺 BC に平行な直線と辺 AB との交点を E とする。このとき、 $\triangle EBD$ が二等辺三角形であることを次のように証明した。[]をうめて証明を完成させなさい。



【証明】 仮定から $\angle EBD = \angle$ [] ……①

$ED \parallel BC$ より、平行線の[]は等しいから

$\angle CBD = \angle EDB$ ……②

①、②から $\angle EBD = \angle$ []

[]が等しいから、 $\triangle EBD$ は二等辺三角形である。

4 逆

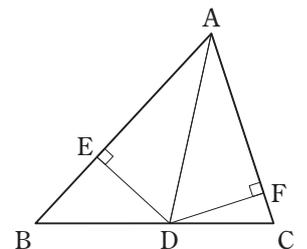
▶教科書 P.135

- 「正方形の4つの辺はすべて等しい。」ということがらの逆を答え、それが正しいかどうかを答えなさい。

5 直角三角形の合同

▶教科書 P.136~138

- 右の図で、 D は $\triangle ABC$ の $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点、 E 、 F はそれぞれ辺 AB 、 AC 上の点で、 $AB \perp DE$ 、 $AC \perp DF$ である。このとき、 $\triangle ADE \cong \triangle ADF$ であることを証明しなさい。



→巻末の補充の問題⑤(P.175)で、この章で学習した内容を確実に身につけよう。

5章 三角形と四角形

まとめテスト

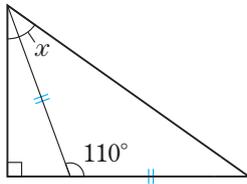
得点

/100点

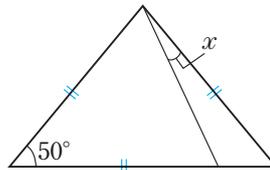
1 次の図で、同じ印をつけた線分の長さは等しいとして、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。

〈5点×2〉

□(1)

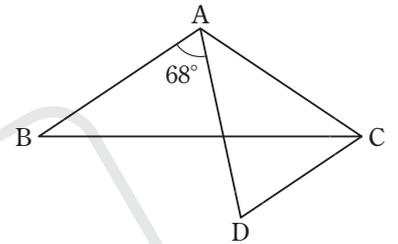


□(2)



2 右の図で、 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形、 $\triangle ADC$ は $AD=AC$ の二等辺三角形で、 $\angle ADC=2\angle ABC$ である。 $\angle BAD=68^\circ$ のとき、 $\angle DAC$ の大きさを求めなさい。

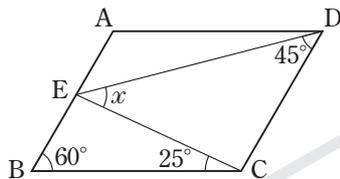
〈5点〉



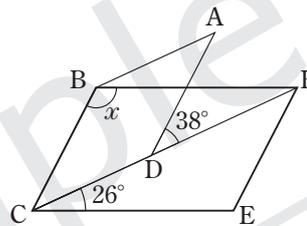
3 次の図で、四角形 $ABCD$ 、 $BCEF$ は平行四辺形である。 $\angle x$ の大きさを求めなさい。

〈5点×2〉

□(1)

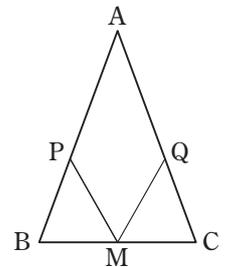


□(2)



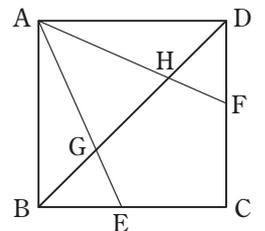
4 右の図で、 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形、点 P 、 Q はそれぞれ辺 AB 、 AC 上の点、点 M は辺 BC の中点である。 $\angle BMP=\angle CMQ$ のとき、 $\triangle PBM \cong \triangle QCM$ であることを証明しなさい。

〈10点〉

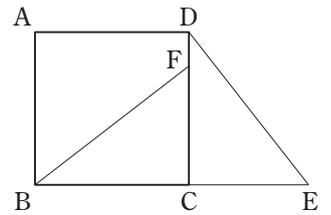


5 右の図で、四角形 $ABCD$ は正方形、点 E 、 F はそれぞれ辺 BC 、 DC 上の点、点 G 、 H はそれぞれ対角線 BD と線分 AE 、 AF との交点である。 $BE=DF$ のとき、 $\triangle AGH$ は二等辺三角形であることを証明しなさい。

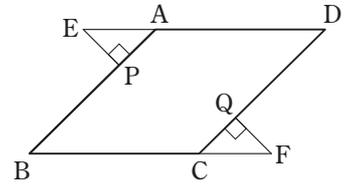
〈10点〉



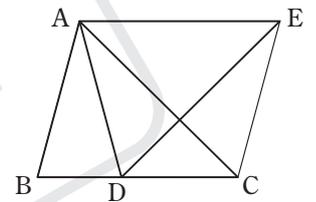
- 6 右の図で、四角形 ABCD は正方形、E は辺 BC の延長線上の点、F は辺 CD 上の点で、 $BF=DE$ である。BE=14cm、DF=2cm のとき、正方形 ABCD の1辺の長さを求めなさい。 (5点)



- 7 右の図の $\square ABCD$ で、辺 DA、BC の延長上にそれぞれ点 E、F を $AE=CF$ とする。点 E、F から辺 AB、CD にそれぞれ垂線 EP、FQ をひく。このとき、 $AP=CQ$ であることを証明しなさい。 (10点)



- 8 右の図で、 $\triangle ABC \equiv \triangle DAE$ であり、点 D は辺 BC 上にある。このとき、四角形 ABCE は平行四辺形であることを証明しなさい。 (10点)



- 9 $\square ABCD$ に次の条件を加えると、それぞれどんな四角形になりますか。ただし、O は対角線の交点とする。 (5点×4)

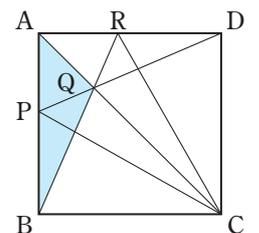
(1) $\angle ACB = \angle ACD$

(2) $OA = OB$

(3) $\angle A = \angle D, \angle BOC = 90^\circ$

(4) $\angle ACD + \angle BDC = 90^\circ$

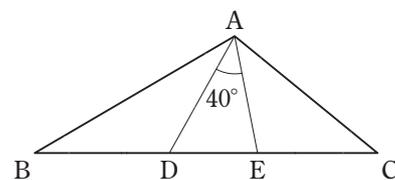
- 10 右の図の正方形 ABCD で、点 P は辺 AB 上の点、点 Q は対角線 AC と線分 PD との交点、点 R は直線 BQ と辺 AD との交点である。図の中の三角形のうち、 $\triangle ABQ$ と面積が等しい三角形をすべて答えなさい。 (10点)



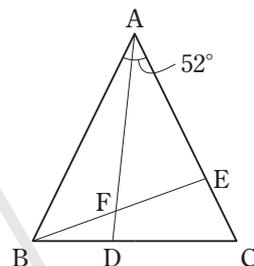
チャレンジ問題

1 次の問いに答えなさい。

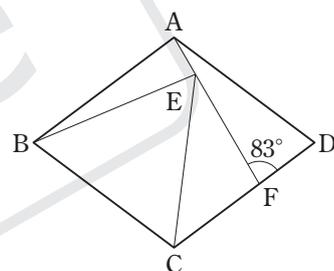
- (1) 右の図のような $\triangle ABC$ があり、D、Eは辺BC上の点で、 $AD=BD$ 、 $AE=CE$ である。 $\angle DAE=40^\circ$ のとき、 $\angle BAC$ の大きさを求めなさい。



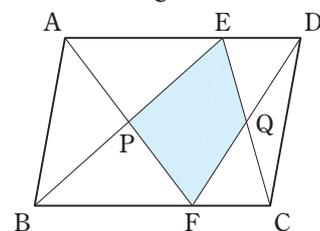
- (2) 右の図で、 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形、D、Eはそれぞれ辺BC、AC上の点で、Fは線分ADとBEとの交点である。 $\angle BAC=52^\circ$ 、 $\angle ADC=\angle AEB$ のとき、 $\angle AFE$ の大きさを求めなさい。



- (3) 右の図で、四角形ABCDはひし形、 $\triangle EBC$ は正三角形で、FはAEの延長と辺CDとの交点である。 $\angle EFD=83^\circ$ のとき、 $\angle ADF$ の大きさを求めなさい。

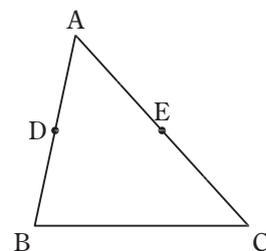


- 2 右の図の平行四辺形ABCDで、Eは辺AD上の点、Fは辺BC上の点で、 $AE:ED=BF:FC=2:1$ である。また、Pは線分AFとBEとの交点、Qは線分CEとDFとの交点である。 $\square ABCD$ の面積が 60cm^2 のとき、四角形EPFQの面積を求めなさい。



- 3 右の図のように、 $\triangle ABC$ の辺AB、ACの中点をそれぞれD、Eとする。DEの延長線上に、 $DE=EF$ となるように点Fをとって、四角形ADCFをつくるとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 四角形ADCFはどのような四角形になりますか。

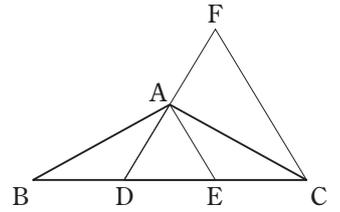


- (2) さらに、 $\triangle ABC$ に次のような条件を加えたとき、四角形ADCFはどのような四角形になりますか。

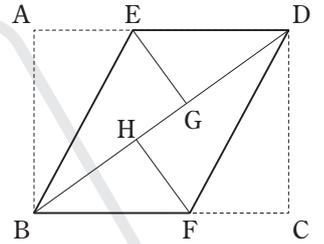
□① $\angle C=90^\circ$

□② $\angle A=\angle B$

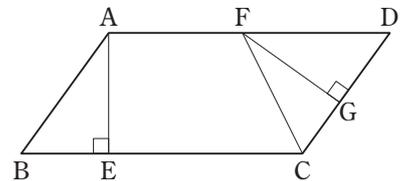
- 4 右の図で、 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形で、辺 BC を 3 等分する点を、
 点 B に近いほうからそれぞれ D 、 E とする。また、点 C を通って AE に平行な直線と DA の延長線との交点を F とする。このとき、 $\triangle FDC$ が二等辺三角形であることを証明しなさい。



- 5 右の図は、長方形の紙 $ABCD$ を、辺 AB 、 CD がそれぞれ対角線 BD と重なるように折り返したところを示したものである。このときできた辺 AD 、 BC 上の折り目の端をそれぞれ E 、 F とし、 A 、 C が対角線 BD と重なった点をそれぞれ G 、 H とする。このとき、四角形 $EBFD$ が平行四辺形であることを証明しなさい。



- 6 右の図で、四角形 $ABCD$ は平行四辺形、 E は点 A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。また、 F は $\angle BCD$ の二等分線と辺 AD との交点、 G は点 F から辺 CD にひいた垂線と辺 CD との交点である。このとき、次の問いに答えなさい。



- (1) $\triangle ABE \cong \triangle FDG$ であることを証明しなさい。

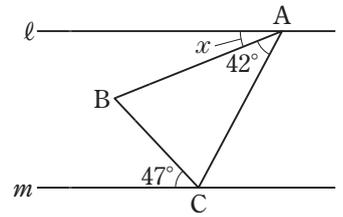
- (2) $AB=4\text{cm}$ 、 $BC=10\text{cm}$ とする。四角形 $AECF$ の面積が四角形 $ABCD$ の面積の $\frac{2}{3}$ 倍となる時、線分 BE の長さを求めなさい。

思考力 実践力 をのばす問題

1 次の問いに答えなさい。

- (1) 右の図のように、 $AB=AC$ である二等辺三角形 ABC と、頂点 A 、 C をそれぞれ通る 2 本の平行な直線 l 、 m がある。このとき、 $\angle x$ の大きさは何度か。

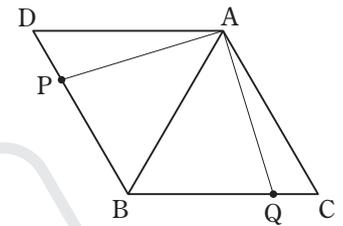
〈鹿児島〉



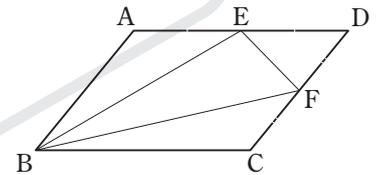
- (2) 右の図で、 $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ は、ともに同じ平面上にある正三角形で、頂点 C と頂点 D は一致しない。点 P は、辺 BD 上にある点で、頂点 B 、頂点 D のいずれにも一致しない。点 Q は、辺 BC 上にある点で、頂点 B 、頂点 C のいずれにも一致しない。頂点 A と点 P 、頂点 A と点 Q をそれぞれ結ぶ。

$\angle PAQ=90^\circ$ 、 $\angle DAP=a^\circ$ とするとき、 $\angle AQB$ の大きさを表す式を、次のア～エのうちから選び、記号で答えよ。〈東京〉

ア $(75-a)$ 度 イ $(90-a)$ 度 ウ $(a+30)$ 度 エ $(a+60)$ 度



- (3) 右の図のような平行四辺形 $ABCD$ があり、辺 AD 、 CD の中点をそれぞれ E 、 F とします。このとき、 $\triangle EBF$ の面積は $\triangle DEF$ の面積の何倍になるか求めなさい。〈埼玉 24〉



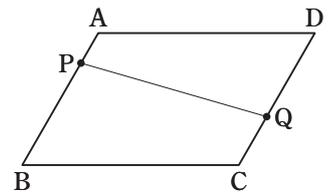
2 右の の中に示したことがらの逆を書きなさい。

- また、 の中のことがらは正しいが、逆は正しくない。 の中のことがらの逆が正しくないことを示すための反例を、1つ書きなさい。〈静岡〉

a も b も正の数ならば、 $a+b$ は正の数である。

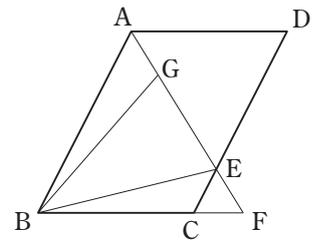
3 右の図は、 $\angle A$ が鈍角の平行四辺形 $ABCD$ です。平行四辺形 $ABCD$ の辺 AB 上

- を点 P が動き、辺 DC 上を点 Q が動きます。点 P は点 A 、点 B と重ならず、点 Q は点 C 、点 D と重ならないこととします。次のア～エのうち、四角形 $PBCQ$ がいつでも平行四辺形になるのはどの条件をみたすときですか。一つ選び、その記号を書きなさい。〈岩手〉

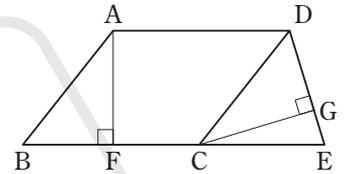


ア $PD \parallel BQ$ イ $AD \parallel PQ$ ウ $CP=BQ$ エ $AP=CQ$

- 4** 右の図で、四角形 ABCD は平行四辺形であり、 $\angle BAD$ の二等分線と辺 CD、
 □ 辺 BC を延長した直線との交点をそれぞれ E、F とする。また、点 G は線分 AF
 上の点で、 $\angle ABG = \angle CBE$ である。このとき、 $\triangle ABG \equiv \triangle FBE$ であることを
 証明しなさい。〈岐阜〉



- 5** 右の図において、四角形 ABCD は内角 $\angle ABC$ が鋭角の平行四辺形である。
 $\triangle EDC$ は $ED = EC$ の二等辺三角形であり、E は直線 BC 上にある。F は、A
 から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。G は、C から辺 ED にひい
 た垂線と辺 ED との交点である。次の問いに答えなさい。〈大阪〉



- (1) $\triangle ABF \equiv \triangle CDG$ であることを証明しなさい。

- (2) 四角形 ABCD の面積を $a\text{cm}^2$ 、四角形 AFED の面積を $b\text{cm}^2$ とするとき、 $\triangle CEG$ の面積を a 、 b を用いて表
 しなさい。

- 6** 右の図のように、平行四辺形 ABCD の辺 AB、BC、CD、DA 上に 4 点 E、F、G、
 □ H をそれぞれとり、線分 EG と BH、DF との交点をそれぞれ I、J とします。
 $AE = BF = CG = DH$ のとき、 $\triangle BEI \equiv \triangle DGJ$ であることを証明しなさい。

〈埼玉 23〉

