15 相似な図形

学習1 図形の相似

▶ 2つの図形があって、一方の図形を形を変えずに拡大または縮小したものと、他方の図形が合同であるとき、この2つの図形は**相似**(そうじ)であるという。

▶**相似な図形の性質**

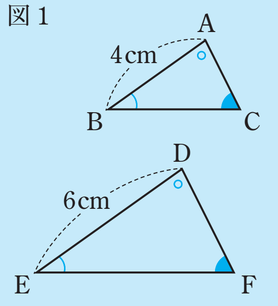
1 相似な図形では、対応する線分の長さの比はすべて等しい。

例 右の図1で、△ABC∽△DEF ならば、AB：DE＝BC：EF＝CA：FD

2 相似な図形では、対応する角の大きさはそれぞれ等しい。

例 右の図1で、△ABC∽△DEF ならば、∠A＝∠D、∠B＝∠E、∠C＝∠F

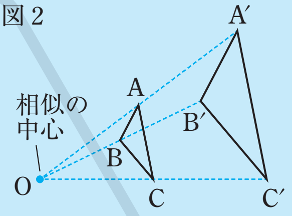
図1



▶右の図2の△ABCと△A′B′C′のように、2つの図形の対応する点がすべて点Oを通る直線上にあり、Oから対応する点までの長さの比がすべて等しいとき、2つの図形は**相似の位置にある**といい、点Oを**相似の中心**という。

例 △ABC∽△A′B′C′　OA：OA′＝OB：OB′＝OC：OC′

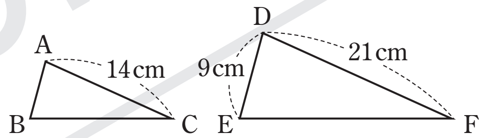
図2



▶相似な2つの図形で、対応する線分の長さの比を**相似比**という。

例 右の図1の△ABCと△DEFの相似比は、AB：DE＝4：6＝2：3

例題1 右の図で、△ABC∽△DEF であるとき、次の問いに答えなさい。



(1) △ABCと△DEFの相似比を求めなさい。

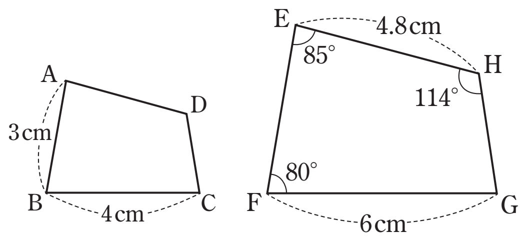
(2) 辺ABの長さを求めなさい。

解き方 (1) 辺ACと辺DFが対応しているから、相似比は、AC：DF＝14：21＝2：3　**答 2：3**

(2) 相似な図形では、対応する線分の長さの比は等しいから、AB＝$x$cm とすると、

x：9＝2：3、3x＝18、x＝6　　比例式の性質　$a：b＝c：d$　ならば　$ad＝bc$　**答 6cm**

確認問題1 右の図で、四角形ABCD∽四角形EFGH であるとき、次の問いに答えなさい。



□(1) 四角形ABCDと四角形EFGHの相似比を求めなさい。

(2) 次の辺の長さを求めなさい。

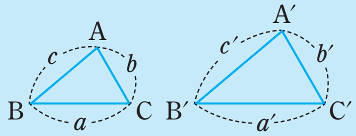
□① 辺AD　　□② 辺EF

□(3) ∠Cの大きさを求めなさい。

学習2 三角形の相似条件

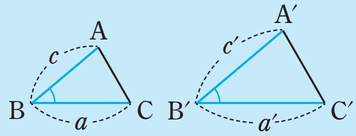
▶ 2つの三角形は、次のどれかが成り立つとき相似である。

[1] 3組の辺の比がすべて等しい。



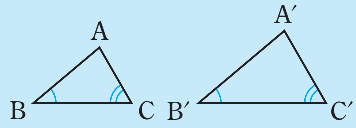
$a:a'=b:b'=c:c'$

[2] 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。



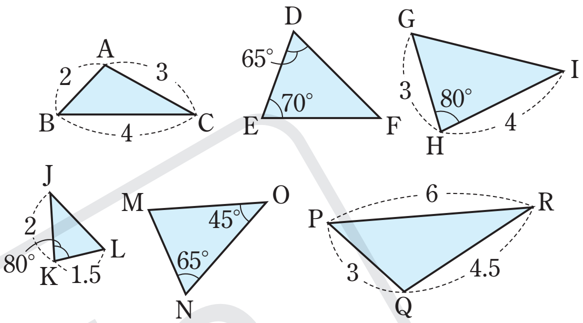
$a:a'=c:c'$、$\angle B=\angle B'$

[3] 2組の角がそれぞれ等しい。



$\angle B=\angle B'$、$\angle C=\angle C'$

例題2 右の図で、相似な三角形の組を見つけ、記号∽を使って表しなさい。また、そのときの相似条件を書きなさい。



解き方 ●AB：QP＝2：3、BC：PR＝4：6＝2：3、CA：RQ＝3：4.5＝2：3 ←相似条件[1]

答 △ABC∽△QPR　3組の辺の比がすべて等しい。

●∠D＝∠N＝65°、∠M＝180°－(65°＋45°)＝70° より、∠E＝∠M＝70° ←相似条件[3]

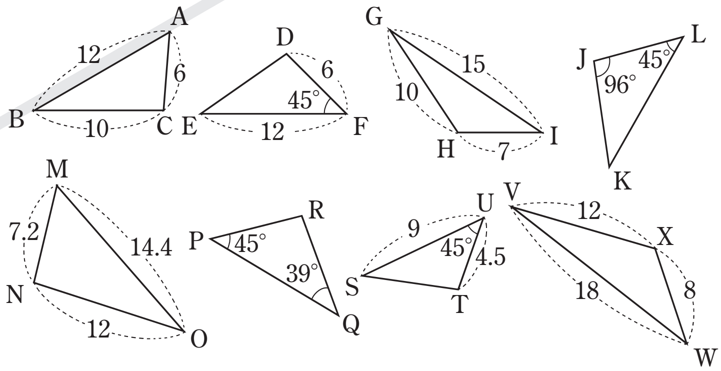
答 △DEF∽△NMO　2組の角がそれぞれ等しい。

●GH：LK＝3：1.5＝2：1、HI：KJ＝4：2＝2：1、∠H＝∠K＝80° ←相似条件[2]

答 △GHI∽△LKJ　2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。

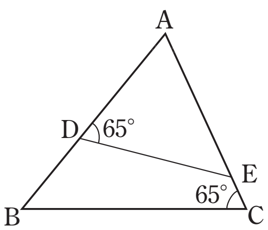
確認問題 2 次の問いに答えなさい。

□(1) 右の図で、相似な三角形の組を見つけ、記号∽を使って表しなさい。また、そのときの相似条件を書きなさい。

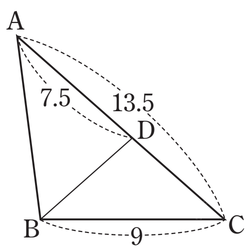


(2) 次の図で、相似な三角形を記号∽を使って表しなさい。また、そのときの相似条件を書きなさい。

□①



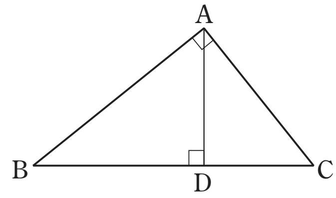
□②



学習3 相似の証明

▶三角形の相似条件を使って、いろいろなことがらを証明することができる。

例題3 右の図は、∠A=90°の△ABCの頂点Aから辺BCに垂線ADをひいたものである。このとき、△ABC∽△DACであることを証明しなさい。



答 **△ABCと△DACにおいて**

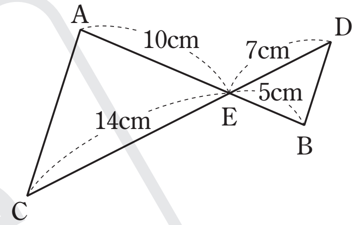
仮定から　∠BAC=∠ADC=90°　……①

∠Cは共通　……②

①、②より、2組の角がそれぞれ等しいから　△ABC∽△DAC

確認問題3 右の図のように、2つの線分AB、CDが点Eで交わっている。

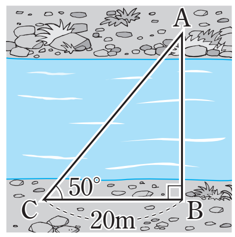
□AE=10cm、BE=5cm、CE=14cm、DE=7cm のとき、△AEC∽△BED であることを証明しなさい。



学習4 縮図の活用

▶縮図をかいて相似な図形の性質を使うと、直接測ることが困難な距離などを求めることができる。

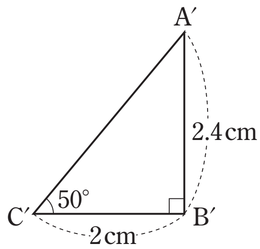
例題4 川をはさんだ2地点A、B間の距離を求めるために、C地点を決めて測定したら、右の図のようになった。$\frac{1}{1000}$の縮図をかいて、A、B間の距離を求めなさい。



解き方 $\frac{1}{1000}$の縮図をかくと、20m=2000cm だから、

B′C′=$2000\times\frac{1}{1000}$=2(cm)

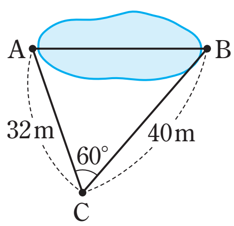
右の縮図より、AB=2.4×1000=2400(cm)



答 **約24m**

確認問題4 池をはさんだ2地点A、B間の距

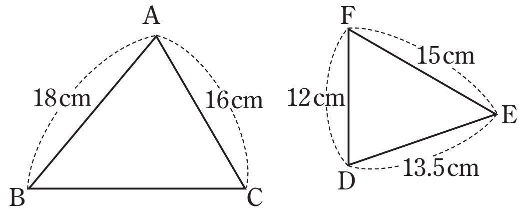
□離を求めるために、C地点を決めて測定したら、右の図のようになった。$\frac{1}{800}$の縮図をかいて、A、B間の距離を求めなさい。



（縮図）

練習問題

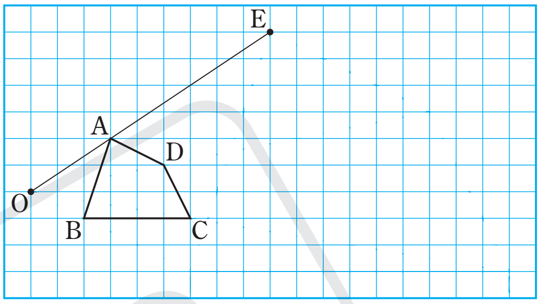
1 **［図形の相似①］** 右の図で、△ABC∽△DEF であるとき、次の問いに答えなさい。 例題1



□(1) △ABC と △DEF の相似比を求めなさい。

□(2) 辺 BC の長さを求めなさい。

2 **［図形の相似②］** 右の図は、点 O を相似の中心として、頂点 A に対応する点 E を OE=3OA となるようにとったものである。このとき、次の問いに答えなさい。 例題1



□(1) 同様にして、点 F、G、H をとり、四角形 ABCD と相似の位置にある四角形 EFGH をかきなさい。

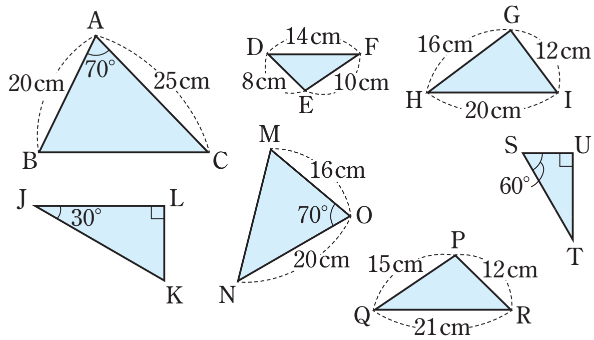
□(2) 辺 AD に対応する辺はどれか答えなさい。

□(3) BC=4 cm のとき、辺 FG の長さを求めなさい。

□(4) ∠G=60° のとき、∠C の大きさを答えなさい。

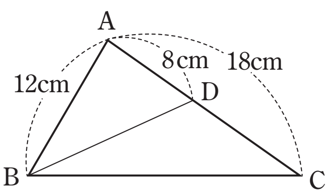
3 **［三角形の相似条件］** 次の問いに答えなさい。 例題2

□(1) 右の図で、相似な三角形の組を見つけ、記号∽を使って表しなさい。また、そのときの相似条件を書きなさい。

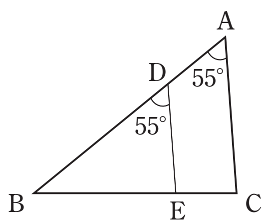


(2) 次の図で、相似な三角形を記号∽を使って表しなさい。また、そのときの相似条件を書きなさい。

□①



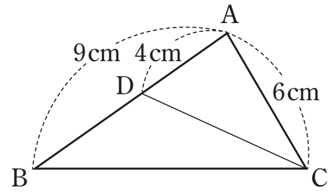
□②



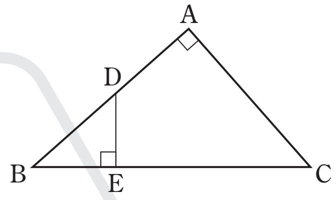
4 ［相似の証明］ 次の問いに答えなさい。

例題3

□(1) 右の図の△ABC で、D は辺 AB 上の点である。AB＝9 cm、AD＝4 cm、AC＝6 cm のとき、△ABC∽△ACD であることを証明しなさい。



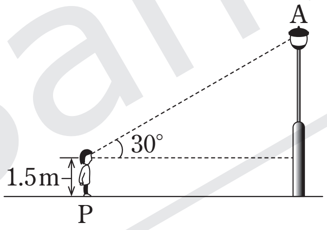
□(2) 右の図で、D、E はそれぞれ ∠A＝90° の直角三角形 ABC の辺 AB、BC 上の点で、DE⊥BC である。このとき、△ABC∽△EBD であることを証明しなさい。



5 ［縮図の活用］ 次の問いに答えなさい。

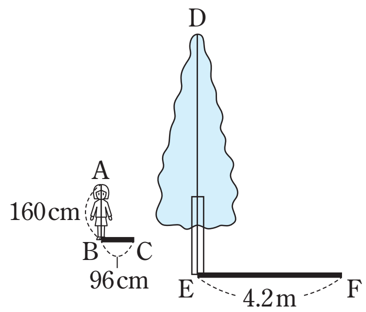
例題4

□(1) 街灯から10m はなれた地点 P から、街灯の先端 A を見上げたら、30° 上に見えた。目の高さを 1.5m として、縮図をかいて、街灯の高さを求めなさい。



（縮図）

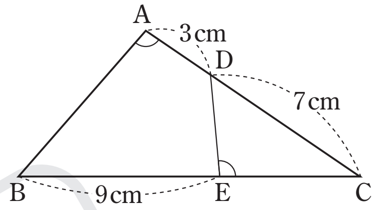
□(2) 右の図のように、身長160cm の生徒の影の長さが96cm のとき、木の影の長さを測ったら、4.2m あった。生徒の身長を AB、生徒の影の長さを BC、木の影の長さを EF として、木の高さ DE を求めなさい。



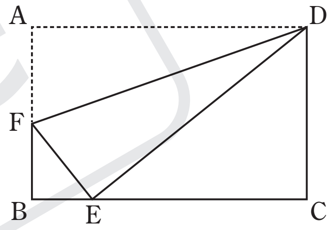
応用問題

1 3辺の長さが9 cm、12 cm、16 cm の三角形がある。この三角形と相似で、2辺の長さが18 cm、24 cm であるような三角形の残りの辺の長さをすべて求めなさい。

2 右の図の△ABC で、点D、E は、それぞれ、辺AC、BC 上の点である。AD＝3 cm、DC＝7 cm、BE＝9 cm、∠BAC＝∠DEC のとき、EC の長さを求めなさい。



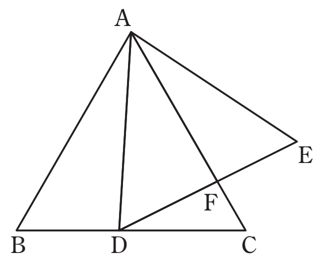
3 右の図は、長方形ABCD の紙をDF を折り目として、頂点A が辺BC 上にくるように折り返したもので、E は頂点A が移った点である。このとき、次の問いに答えなさい。



(1) △BEF と相似な三角形はどの三角形か答えなさい。

(2) AD＝15 cm、AF＝5 cm、FB＝4 cm のとき、EC の長さを求めなさい。

4 右の図のような正三角形ABC がある。この正三角形の辺BC 上に点D をとり、辺AD を1辺とする正三角形ADE をつくる。辺AC とDE との交点をF とするとき、△ABD∽△AEF であることを証明しなさい。



難 **5** 右の図1のように、円錐の容器の内側の面にぴったりつくように球を入れた。この円錐の容器の底面の半径は4 cm、母線の長さは12 cm で、円錐の容器の頂点から球の最上部までの長さも12 cm になった。図2は、そのときのようすを表している。円錐の容器の厚さは考えないものとして、この球の体積を求めなさい。

図1

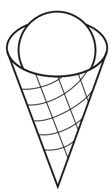
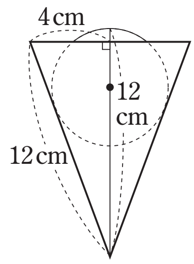


図2



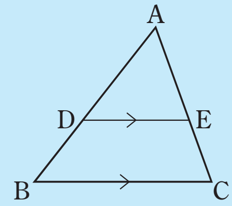
16 三角形と線分の比

学習1 三角形と線分の比(1)

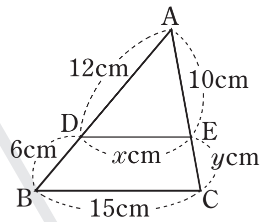
▶定理 △ABC において、点 D、E をそれぞれ辺 AB、AC 上、または、その延長線上の点とするとき、次のことがいえる。

1 DE∥BC ならば AD：AB＝AE：AC＝DE：BC

2 DE∥BC ならば AD：DB＝AE：EC



例題1 右の図で、DE∥BC のとき、x、y の値を求めなさい。



解き方

AD：AB＝DE：BC
12：18＝x：15
18x＝180
x＝10

AD：DB＝AE：EC
12：6＝10：y
12y＝60
y＝5

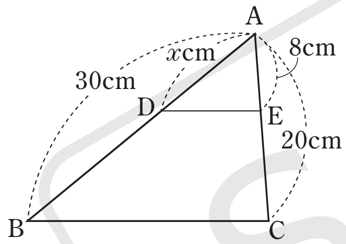
〈比例式の性質〉
$a:b=c:d$ ならば $ad=bc$

答 $x=10$、$y=5$

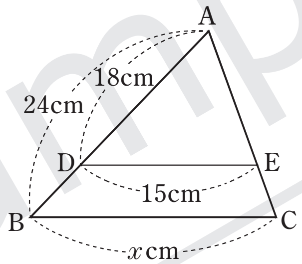
確認問題1 次の問いに答えなさい。

(1) 次の図で、DE∥BC のとき、x の値を求めなさい。

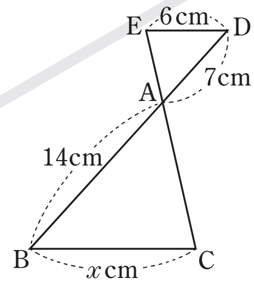
□①



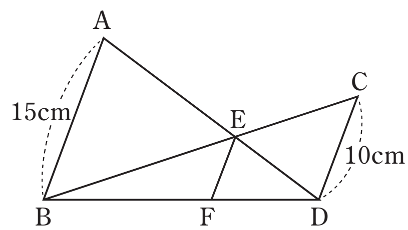
□②



□③



(2) 右の図で、AB∥EF∥CD のとき、次の問いに答えなさい。



□① AE：ED を求めなさい。

□② ED：AD を求めなさい。

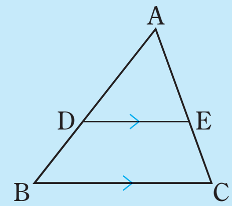
□③ EF の長さを求めなさい。

学習2 三角形と線分の比(2)

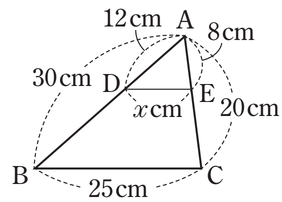
▶**定理**　△ABC において、点 D、E をそれぞれ辺 AB、AC 上、または、その延長線上の点とするとき、次のことがいえる。

1　AD：AB＝AE：AC　ならば　DE∥BC

2　AD：DB＝AE：EC　ならば　DE∥BC



例題2　右の図の△ABC で、D、E はそれぞれ辺 AB、AC 上の点である。x の値を求めなさい。

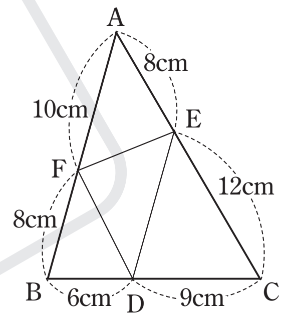


解き方　AD：AB＝12：30＝2：5、AE：AC＝8：20＝2：5 より、
AD：AB＝AE：AC だから、DE∥BC　　よって、DE：BC＝AD：AB
x：25＝2：5、5x＝50、x＝10

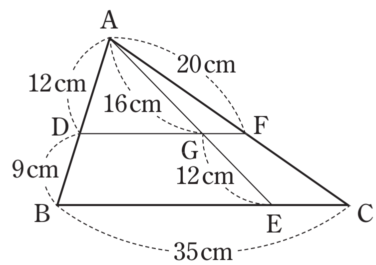
答　x＝10

確認問題 2　次の問いに答えなさい。

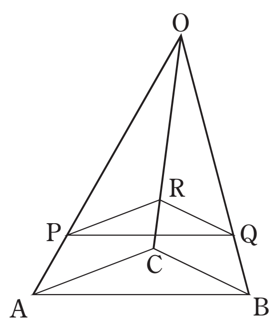
□(1)　右の図で、線分 DE、EF、FD のうち、△ABC の辺に平行なものはどれか。また、そのことがいえる理由も説明しなさい。



□(2)　右の図の△ABC で、D、E、F はそれぞれ辺 AB、BC、CA 上の点、G は AE と DF との交点である。このとき、FC、DF の長さを求めなさい。



□(3)　右の図で、直線 AP、BQ、CR は点 O で交わっている。このとき、PR∥AC、QR∥BC ならば、PQ∥AB となることを次のように証明した。[　　]をうめて証明を完成させなさい。



【証明】　△OAC で、PR∥AC だから

OP：OA＝OR：[　　　　　　]　……①

△OBC で、QR∥BC だから

OQ：OB＝OR：[　　　　　　]　……②

①、②から

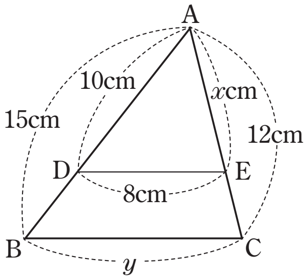
OP：OA＝[　　　　　　]：[　　　　　　]

したがって　　PQ∥AB

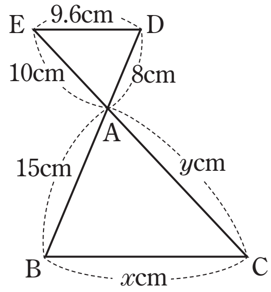
練習問題

1 [三角形と線分の比⑴①]　次の図で、DE∥BC のとき、x、y の値を求めなさい。　例題1

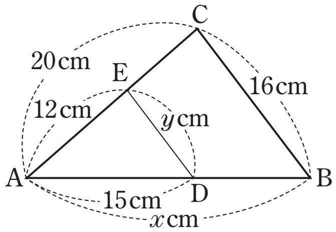
□⑴



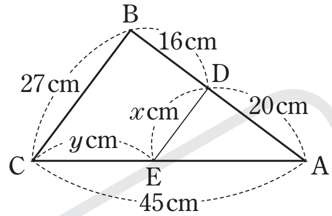
□⑵



□⑶

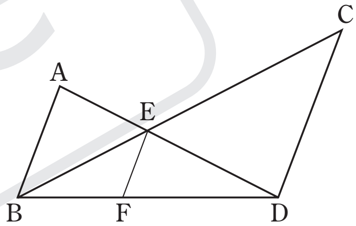


□⑷



2 [三角形と線分の比⑴②]　次の問いに答えなさい。　例題1

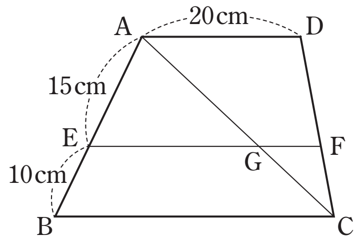
⑴　右の図で、AB、EF、CD が平行で、AB＝25 cm、EF＝15 cm、BD＝55 cm のとき、次の問いに答えなさい。



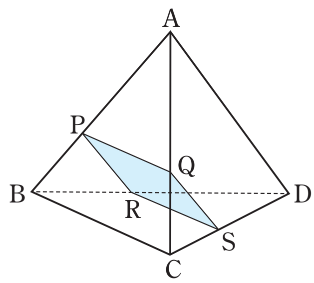
□①　FD の長さを求めなさい。

□②　CD の長さを求めなさい。

□⑵　右の図の四角形 ABCD は、AD∥BC の台形である。辺 AB、DC 上にそれぞれ点 E、F を EF∥BC となるようにとる。また、G は、AC と EF との交点である。このとき、GF の長さを求めなさい。



3 [三角形と線分の比⑵]　右の図で、三角錐 ABCD の 4 辺 AB、AC、DB、DC をそれぞれ 3：2 に分ける点を P、Q、R、S とするとき、次の問いに答えなさい。　例題2

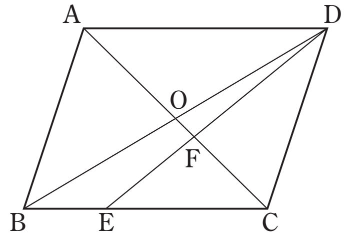


□⑴　BC＝15 cm のとき、PQ の長さを求めなさい。

□⑵　四角形 PQSR はどんな四角形になるか答えなさい。

応用問題

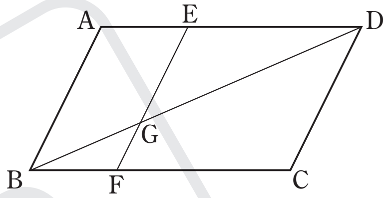
1 右の図の▱ABCD で、対角線 AC と BD との交点を O、辺 BC を 1：2 に分ける点を E、AC と DE との交点を F とする。このとき、次の問いに答えなさい。



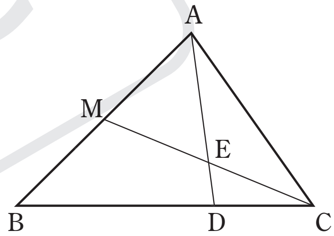
□(1) DF：FE を求めなさい。

□(2) OF：AC を求めなさい。

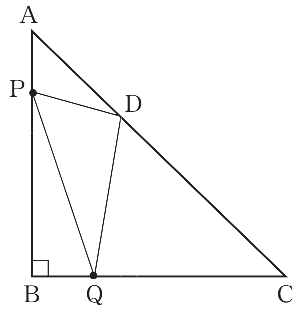
2 右の図の▱ABCD で、AB∥EF、G は EF と BD との交点である。
□AB＝6 cm、AD＝9 cm、BF＝3 cm のとき、EG の長さを求めなさい。



3 右の図の△ABC で、辺 AB の中点を M、辺 BC を 2：1 に分ける点を D とし、
□AD と CM との交点を E とする。AD＝24 cm のとき、AE の長さを求めなさい。



難**4** 右の図のように、AB＝BC＝12 cm、∠B＝90°の直角二等辺三角形 ABC があり、辺 AC 上に AD：DC＝1：2 となるように点 D をとる。辺 AB 上を動く点 P と辺 BC 上を動く点 Q があり、つねに AP＝BQ となるとき、次の問いに答えなさい。



□(1) AP＝3 cm のとき、△APD と△DQC の面積をそれぞれ求めなさい。

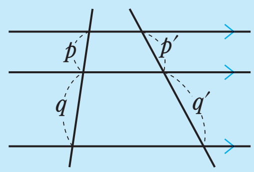
□(2) △DPQ の面積が34 cm^2 となるとき、AP の長さを求めなさい。

平行線と線分の比、中点連結定理

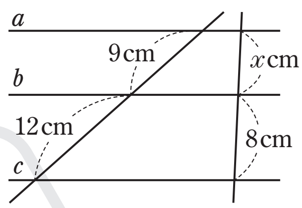
学習1 平行線と線分の比

▶定理　いくつかの平行線に 2 直線が交わるとき、2 直線は平行線によって等しい比に分けられる。

$$p : q = p' : q'$$



例題1 右の図で、直線 a、b、c が平行であるとき、x の値を求めなさい。



解き方 直線 a、b、c が平行だから

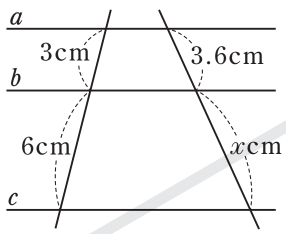
$9 : 12 = x : 8$、$12x = 72$、$x = 6$

答 $x=6$

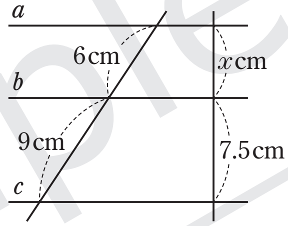
確認問題 1 次の問いに答えなさい。

(1) 次の図で、直線 a、b、c、d が平行であるとき、x、y の値を求めなさい。

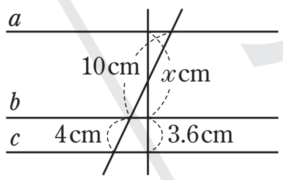
□①



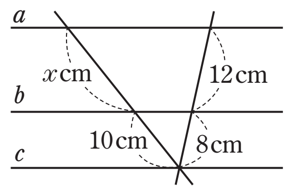
□②



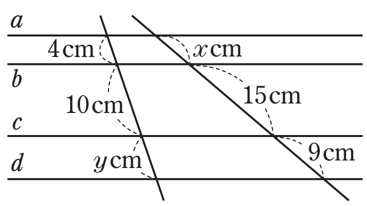
□③



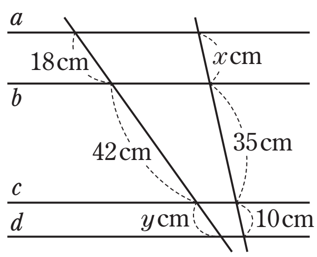
□④



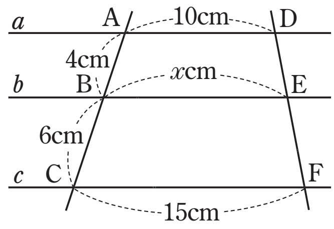
□⑤



□⑥

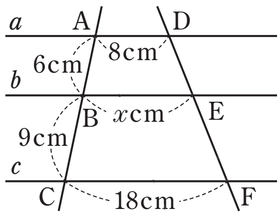


□(2)　右の図で、直線 a、b、c が平行であるとき、x の値を求めなさい。

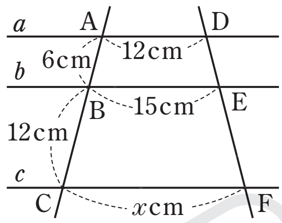


(3)　次の図で、直線 a、b、c が平行であるとき、x の値を求めなさい。

□①



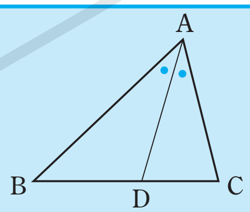
□②



学習2　角の二等分線と線分の比

▶△ABC において、∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき、

AB：AC＝BD：DC

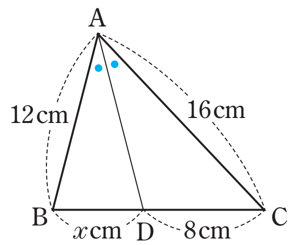


例題 2　右の図の△ABC で、∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき、x の値を求めなさい。

解き方　∠BAD＝∠CAD だから、AB：AC＝BD：DC より、

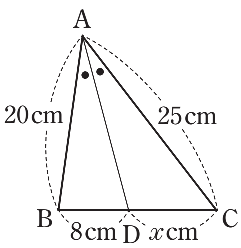
12：16＝x：8、16x＝96、x＝6

答　x＝6

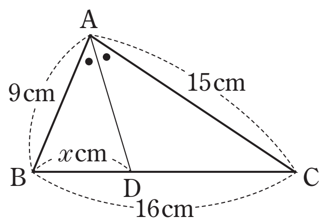


確認問題 2　次の図の△ABC で、∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき、x の値を求めなさい。

□(1)



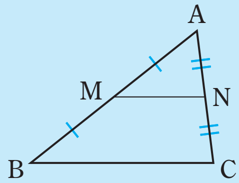
□(2)



学習3 中点連結定理

▶定理　三角形の2辺の中点を結ぶ線分は、残りの辺に平行で、長さはその半分である。

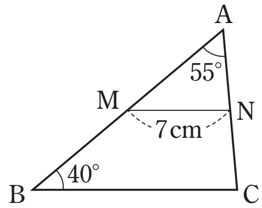
$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AM}=\mathrm{MB}\\ \mathrm{AN}=\mathrm{NC}\end{array}\right\}\ \text{ならば}\ \left\{\begin{array}{l}\mathrm{MN}/\!/\mathrm{BC}\\ \mathrm{MN}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\end{array}\right.$$



例題3　右の図の△ABC で、M、N はそれぞれ辺 AB、AC の中点である。このとき、次の問いに答えなさい。

(1)　BC の長さを求めなさい。

(2)　∠ANM の大きさを求めなさい。



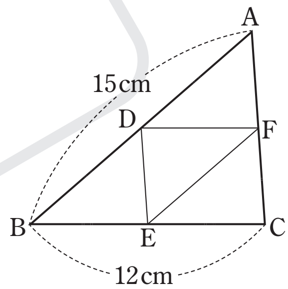
解き方　(1)　中点連結定理より、$\mathrm{MN}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$ だから、BC＝2MN＝2×7＝14(cm)　答 **14cm**

(2)　△ABC で、∠ACB＝180°－(55°＋40°)＝85°

中点連結定理より、MN∥BC だから、∠ANM＝∠ACB＝85°　← 同位角は等しい。　答 85°

確認問題 3　次の問いに答えなさい。

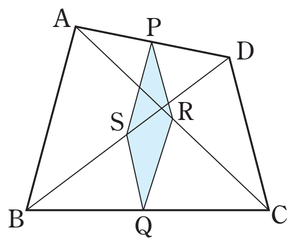
(1)　右の図の△ABC で、D、E、F はそれぞれ辺 AB、BC、CA の中点である。AB＝15cm、BC＝12cm のとき、次の問いに答えなさい。



□①　CA＝9 cm のとき、△DEF の周の長さを求めなさい。

□②　∠ADF＝45° のとき、∠BEF の大きさを求めなさい。

(2)　右の図の四角形 ABCD で、辺 AD、BC の中点をそれぞれ P、Q とし、対角線 AC、BD の中点をそれぞれ R、S とするとき、次の問いに答えなさい。



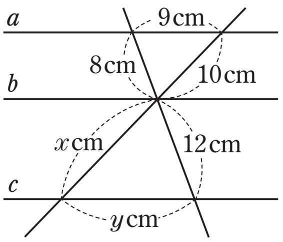
□①　四角形 PSQR はどんな四角形になるか答えなさい。

□②　AB＝DC のとき、四角形 PSQR はどんな四角形になるか答えなさい。

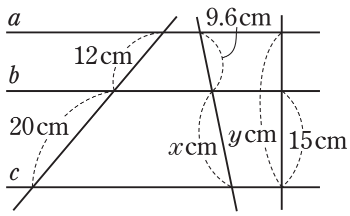
練 習 問 題

1 **［平行線と線分の比①］** 次の図で、直線 a、b、c、d が平行であるとき、x、y の値を求めなさい。 例題1

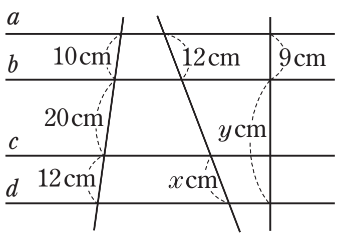
□(1)



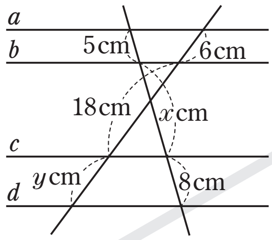
□(2)



□(3)

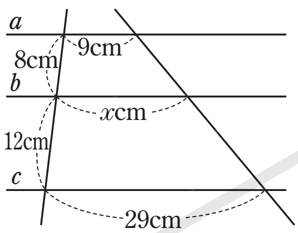


□(4)

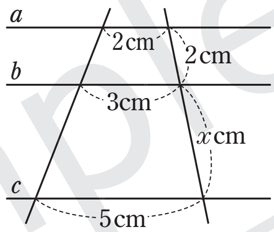


2 **［平行線と線分の比②］** 次の図で、直線 a、b、c が平行であるとき、x の値を求めなさい。 例題1

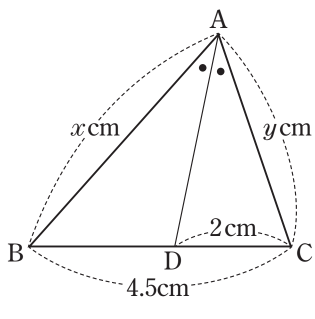
□(1)



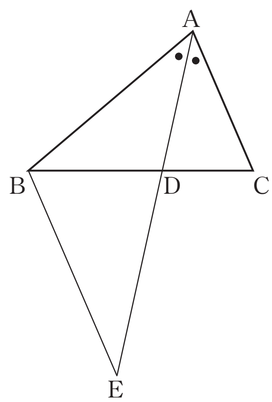
□(2)



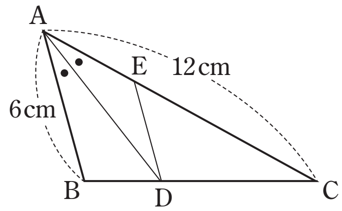
3 **［角の二等分線と線分の比①］** 右の図の△ABC で、∠A の二等分線と辺 BC と
□の交点を D とする。△ABC の周の長さが13.5 cm、BC＝4.5 cm、DC＝2 cm のとき、
x、y の値を求めなさい。 例題2



4 **［角の二等分線と線分の比②］** 右の図で、D は△ABC の∠A の二等分線と辺 BC
□との交点、E は直線 AD と B から AC に平行にひいた直線との交点である。このと
き、AB：AC＝BD：DC となることを証明しなさい。 例題2



5 **［角の二等分線と線分の比③］** 右の図の△ABC で、D、E はそれぞれ辺 BC、AC 上の点で、∠BAD＝∠CAD、ED∥AB である。このとき、次の問いに答えなさい。 例題2

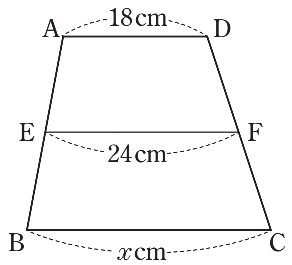


□(1) BD＝3cm のとき、辺 BC の長さを求めなさい。

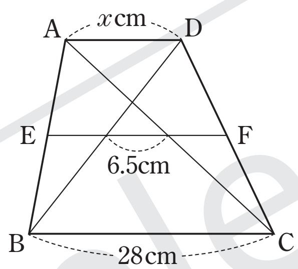
□(2) ED：AB を求めなさい。

6 **［中点連結定理①］** 次の図で、四角形 ABCD は、AD∥BC の台形で、辺 AB の中点を E とし、E から辺 BC に平行な直線をひき、辺 CD との交点を F とする。このとき、x の値を求めなさい。 例題3

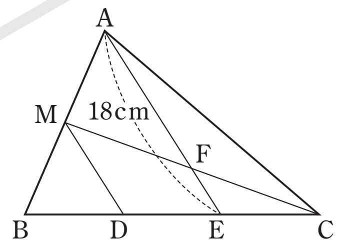
□(1)



□(2)



7 **［中点連結定理②］** 右の図の△ABC で、辺 AB の中点を M、辺 BC を 3 等分する点を D、E とし、AE と CM との交点を F とする。AE＝18cm のとき、次の問いに答えなさい。 例題3

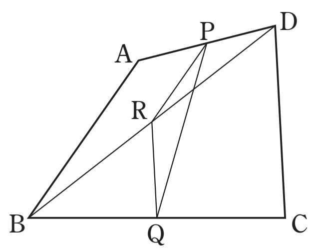


□(1) MD の長さを求めなさい。

□(2) AF の長さを求めなさい。

8 **［中点連結定理③］** 右の図で、四角形 ABCD の辺 AD、BC、対角線 BD の中点をそれぞれ P、Q、R とする。AB＝CD のとき、△PRQ は二等辺三角形であることを証明しなさい。 例題3

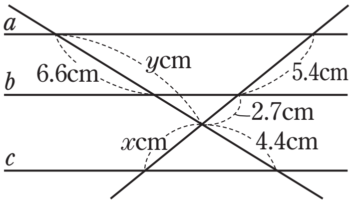
□



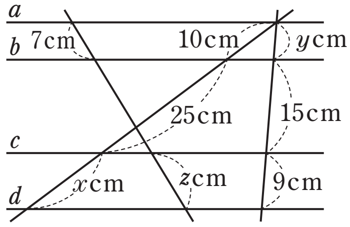
応用問題

1 次の図で、直線 a、b、c、d が平行であるとき、x、y、z の値を求めなさい。

□(1)

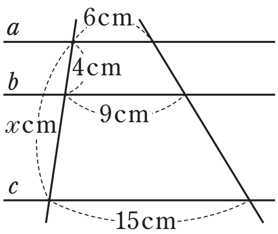


□(2)

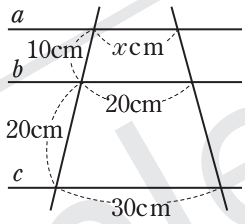


2 次の図で、直線 a、b、c が平行であるとき、x の値を求めなさい。

□(1)

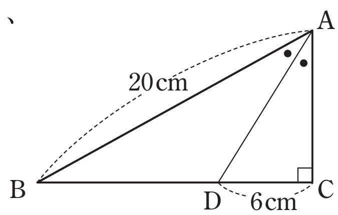


□(2)

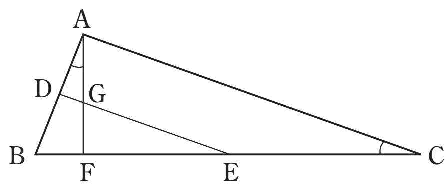


3 右の図で、AD は△ABC の∠A の二等分線である。AB＝20cm、DC＝6cm のとき、

□△ABD の面積を求めなさい。



4 右の図の△ABC で、D、E はそれぞれ辺 AB、BC の中点、F は辺 BC 上の点で、∠BAF＝∠BCA、G は AF と DE との交点である。AB＝3 cm、BC＝9 cm のとき、次の問いに答えなさい。



□(1) FE の長さを求めなさい。

□(2) GE の長さは DG の長さの何倍か求めなさい。

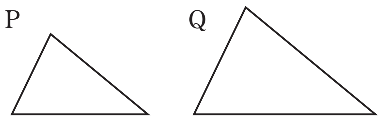
18 相似な図形の面積比と体積比

学習1 相似な図形の面積比

▶相似な図形の面積比は、相似比の２乗に等しい。

相似比が $m:n$ ならば、面積比は $m^2:n^2$

例題1 相似な２つの図形P,Qがあり,その相似比は 2：3 である。



(1) Pの周の長さが30 cmのとき、Qの周の長さを求めなさい。

(2) Qの面積が54 cm^{2}のとき、Pの面積を求めなさい。

解き方 (1) 周の長さの比は相似比に等しい。

Qの周の長さを$x$cmとすると、$\underbrace{30:x}_{\text{周の長さの比}}=\underbrace{2:3}_{\text{相似比}}$、$2x=90$、$x=45$ 　答 **45 cm**

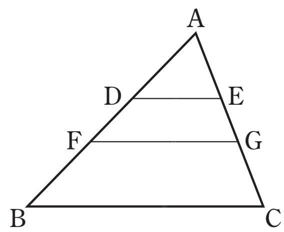
(2) Pの面積を$y$cm^{2}とすると、$\underbrace{y:54}_{\text{面積比}}=\underbrace{2^2:3^2}_{\text{相似比の２乗}}$、$y:54=4:9$、$9y=216$、$y=24$ 　答 **24 cm^2**

確認問題1 次の問いに答えなさい。

□(1) 相似な２つの図形A、Bがあって、AとBの相似比は4：5である。Bの面積が100 cm^{2}のとき、Aの面積を求めなさい。

□(2) 相似な２つの図形P、Qがあって、周の長さはPが36 cm、Qが30 cmである。Pの面積が72 cm^{2}のとき、Qの面積を求めなさい。

(3) 右の図で、線分DE、FGは辺BCに平行で、AD：DF=3：2、AD=FB とするとき、次の問いに答えなさい。



□① △ADEの周の長さが15cmのとき、△AFGの周の長さを求めなさい。

□② △ADEの面積が18cm^{2}のとき、四角形DFGE、四角形FBCGの面積をそれぞれ求めなさい。

学習2 相似な立体の表面積の比と体積比

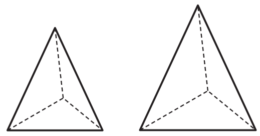
▶ [1] 相似な立体の表面積の比は、相似比の 2 乗に等しい。

相似比が $m:n$ ならば、表面積の比は $m^2:n^2$

[2] 相似な立体の体積比は、相似比の 3 乗に等しい。

相似比が $m:n$ ならば、体積比は $m^3:n^3$

例題2 相似な 2 つの三角錐 P、Q があり、その相似比は $4:5$ である。



(1) Q の表面積が $50\,\text{cm}^2$ のとき、P の表面積を求めなさい。

(2) P の体積が $128\,\text{cm}^3$ のとき、Q の体積を求めなさい。

解き方 (1) P の表面積を $x\,\text{cm}^2$ とすると、$\underbrace{x:50}_{\text{表面積の比}}=\underbrace{4^2:5^2}_{\text{相似比の２乗}}$、$x:50=16:25$、$25x=800$、$x=32$

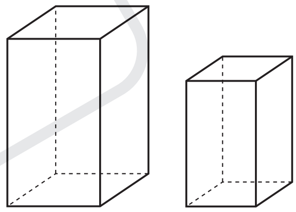
答 $32\,\text{cm}^2$

(2) Q の体積を $y\,\text{cm}^3$ とすると、$\underbrace{128:y}_{\text{体積比}}=\underbrace{4^3:5^3}_{\text{相似比の３乗}}$、$128:y=64:125$、$64y=16000$、$y=250$

答 $250\,\text{cm}^3$

確認問題 2 次の問いに答えなさい。

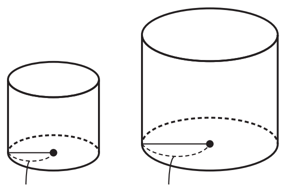
(1) 右の図のように、相似な 2 つの四角柱 P、Q があって、P と Q の相似比は $4:3$ である。このとき、次の問いに答えなさい。



□① Q の表面積が $135\,\text{cm}^2$ のとき、P の表面積を求めなさい。

□② P の体積が $192\,\text{cm}^3$ のとき、Q の体積を求めなさい。

(2) 相似な 2 つの円柱 A、B があって、底面の半径は A が 6 cm、B が 9 cm である。このとき、次の問いに答えなさい。



□① A の表面積が $240\pi\,\text{cm}^2$ のとき、B の表面積を求めなさい。

□② B の体積が $432\pi\,\text{cm}^3$ のとき、A の体積を求めなさい。

練習問題

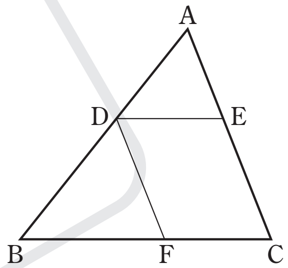
1 **[相似な図形の面積比①]**　次の問いに答えなさい。 例題1

□(1)　相似な２つの円P、Qがあって、PとQの相似比は3：4である。Pの面積が54π cm^{2}のとき、Qの面積を求めなさい。

□(2)　相似な２つの四角形A、Bがあり、周の長さは、Aが70 cm、Bが112 cmである。Aの面積が275 cm^{2}のとき、Bの面積を求めなさい。

□(3)　相似な２つの△ABC、△DEFがあり、辺ABと対応する辺DEの長さの比は3：8である。△ABCの面積が36 cm^{2}のとき、△DEFの面積を求めなさい。

2 **[相似な図形の面積比②]**　右の図の△ABCで、DE∥BC、DF∥ACとする。△ADEの面積が36 cm^{2}で、AD：DB＝3：4 のとき、次の問いに答えなさい。 例題1



□(1)　△DBFの面積を求めなさい。

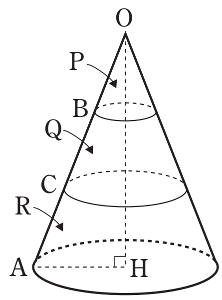
□(2)　四角形DFCEの面積を求めなさい。

3 **[相似な立体の表面積の比と体積比①]**　２つの球A、Bがあって、AとBの半径の比が2：3のとき、次の問いに答えなさい。 例題2

□(1)　AとBの表面積の比を求めなさい。

□(2)　Bの体積が972π cm^{3}のとき、Aの体積を求めなさい。

4 **[相似な立体の表面積の比と体積比②]**　右の図のような円錐を、母線OAを３等分する点B、Cを通り、底面に平行な平面で切って、３つの立体P、Q、Rに分けるとき、次の問いに答えなさい。 例題2

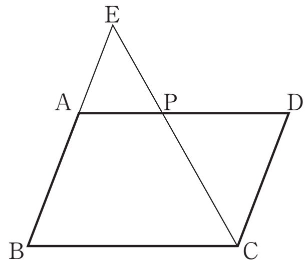


□(1)　立体Pと立体Qの側面積の比を求めなさい。

□(2)　OH＝18 cm、AH＝6 cmとするとき、立体Rの体積を求めなさい。

応用問題

1 右の図のように、▱ABCD の辺 AD 上に、AP：PD＝2：3 となるような点 P をとり、BA の延長と CP の延長との交点を E とする。このとき、次の問いに答えなさい。



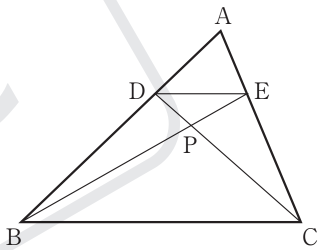
□(1) EA＝6cm のとき、EB の長さを求めなさい。

□(2) △CDP と△EAP の面積比を求めなさい。

□(3) △EAP の面積が 8 cm^2 のとき、▱ABCD の面積を求めなさい。

2 相似な 2 つの角錐 P、Q があって、底面積は P が27 cm^2、Q が48 cm^2 である。P の体積が81 cm^3 のとき、Q
□の体積を求めなさい。

3 右の図の△ABC で、D、E はそれぞれ辺 AB、AC 上の点で、DE∥BC である。DB＝2AD、△PDE＝3 cm^2 のとき、次の問いに答えなさい。

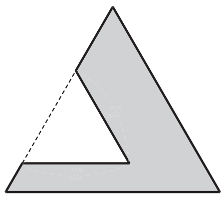


□(1) DE：BC を求めなさい。

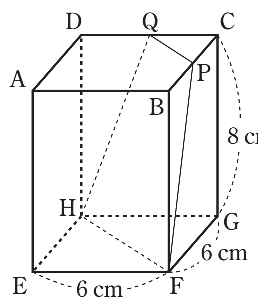
□(2) △DBE の面積を求めなさい。

□(3) △ABC の面積を求めなさい。

難**4** 右の図のように、大きい正三角形から小さい正三角形を取り除いてできた図形がある。
□この図形の面積は、取り除いた正三角形の面積の 3 倍であり、この図形の周の長さは 56cm である。取り除いた正三角形の 1 辺の長さを求めなさい。



5 右の図のような、EF＝FG＝6 cm、CG＝8 cm の直方体 ABCDEFGH で、P、Q は
□それぞれ辺 BC、CD の中点とする。この直方体を四角形 PQHF で切って 2 つの立体に分けたとき、頂点 C をふくむ方の立体の体積を求めなさい。

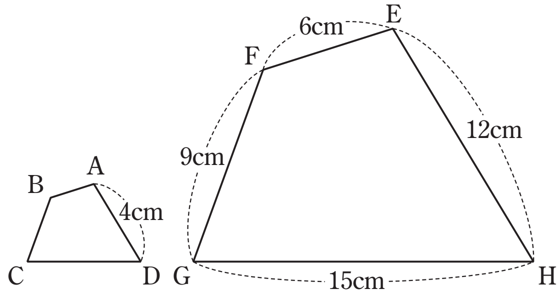


5 章のまとめ

1 図形の相似、相似の位置と相似比、相似な図形の性質の活用

▶教科書 P.126 ～ 131

右の図で、四角形 ABCD∽四角形 EFGH であるとき、次の問いに答えなさい。



□(1) 四角形 ABCD と 四角形 EFGH の相似比を求めなさい。

□(2) 辺 AB の長さを求めなさい。

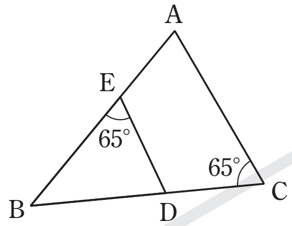
□(3) 辺 CD の長さを求めなさい。

2 三角形の相似条件

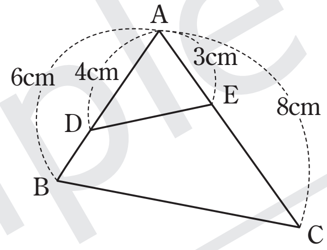
▶教科書 P.132 ～ 134

次の図で、相似な三角形の組を見つけ、記号∽を使って表しなさい。また、そのときの相似条件を書きなさい。

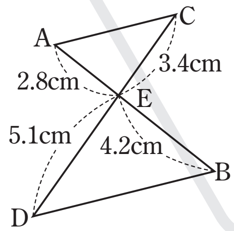
□(1)



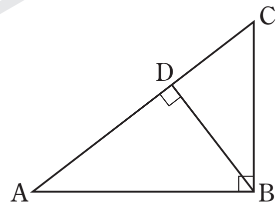
□(2)



□(3)



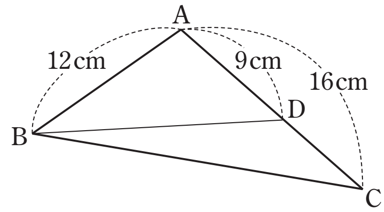
□(4)



3 相似の証明

▶教科書 P.135・136

□ 右の図の△ABC で、D は辺 AC 上の点である。AB＝12cm、AD＝9cm、AC＝16cm のとき、△ABC∽△ADB であることを証明しなさい。

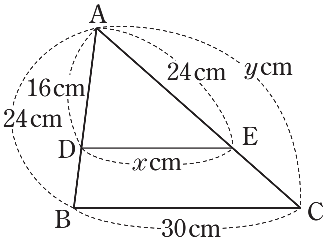


4 三角形と線分の比

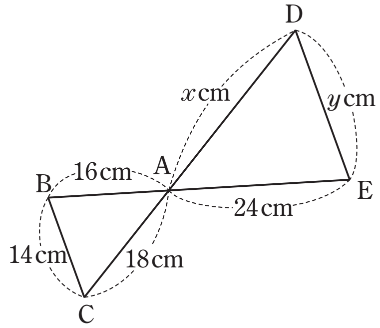
▶教科書 P.139 ～ 143

次の図で、DE∥BC のとき、x、y の値を求めなさい。

□(1)



□(2)

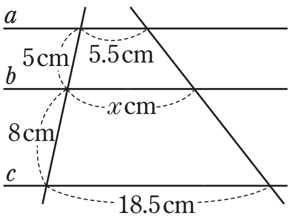


5 平行線と線分の比

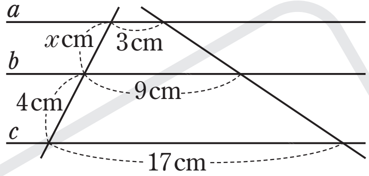
▶教科書 P.144・145

次の図で、直線 a、b、c が平行であるとき、x の値を求めなさい。

□(1)



□(2)

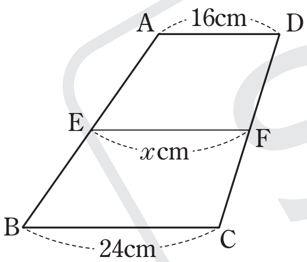


6 中点連結定理

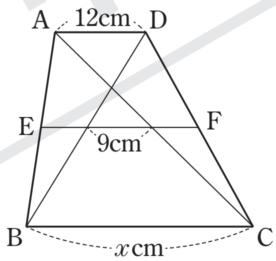
▶教科書 P.146・147

次の図で、四角形 ABCD は、AD∥BC の台形で、辺 AB の中点を E とし、E から辺 BC に平行な直線をひき、辺 CD との交点を F とする。このとき、x の値を求めなさい。

□(1)



□(2)



7 相似な図形の面積比

▶教科書 P.149 ～ 151

□ 相似な 2 つの五角形 P、Q があって、P と Q の相似比は 7：2 である。P の面積が147 cm^2 のとき、Q の面積を求めなさい。

8 相似な立体の表面積の比と体積比

▶教科書 P.152 ～ 154

相似な 2 つの円錐 A、B があって、A と B の底面の円の半径の比が 5：4 のとき、次の問いに答えなさい。

□(1) A と B の表面積の比を求めなさい。

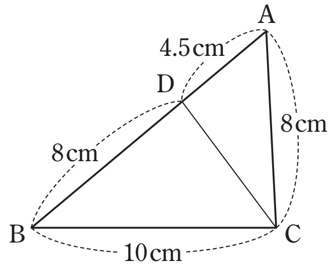
□(2) A の体積が750 π cm^3 のとき、B の体積を求めなさい。

まとめテスト

得点

／100点

1　右の図の△ABC で、AD＝4.5 cm、DB＝8 cm、BC＝10 cm、AC＝8 cm のとき、次の問いに答えなさい。〈6点×2〉

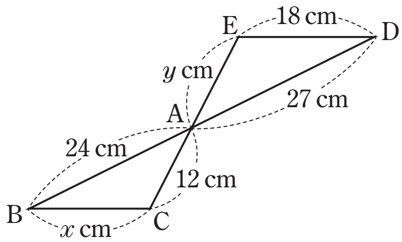


□(1)　相似な三角形を、記号∽を使って表しなさい。また、そのときの相似条件を書きなさい。

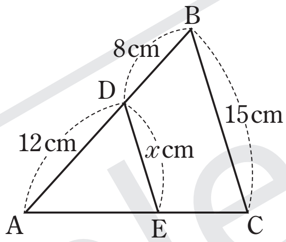
□(2)　CD の長さを求めなさい。

2　次の図で、DE∥BC のとき、x、y の値を求めなさい。〈6点×3〉

□(1)

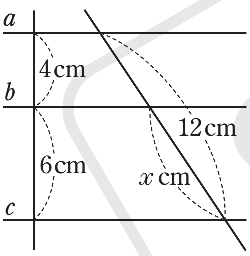


□(2)

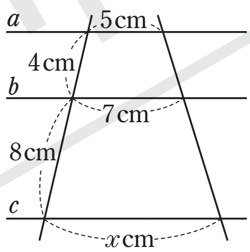


3　次の図で、直線 a、b、c が平行であるとき、x の値を求めなさい。〈6点×2〉

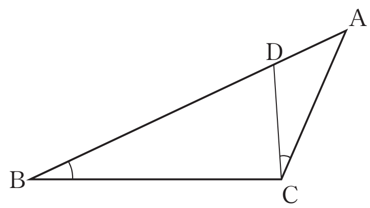
□(1)



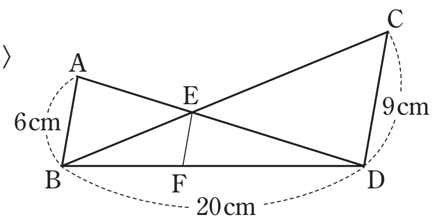
□(2)



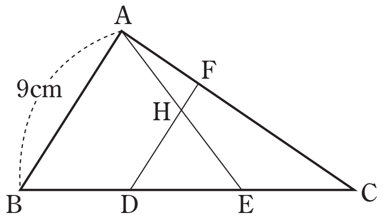
4　右の図で、∠ABC＝∠ACD、AB＝8cm、BC＝6cm、CA＝4cm のとき、
□BD の長さを求めなさい。〈6点〉



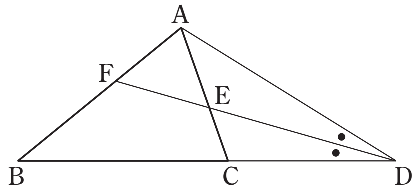
5　右の図で、AB、CD、EF は平行で、AB＝6 cm、CD＝9 cm、BD＝20 cm
□である。このとき、BF、EF の長さを求めなさい。〈6点×2〉



6 右の図のような AB=9 cm の△ABC がある。D、E は辺 BC を 3 等分する点で、FD∥AB となるように、辺 AC 上に点 F をとる。AE と DF との交点を H とするとき、FH の長さを求めなさい。 〈6 点〉



7 右の図のように、△ABC の辺 BC の延長上に、∠CBA=∠CAD となる点 D をとる。∠ADC の二等分線が辺 AC、AB と交わる点をそれぞれ E、F とする。このとき、次の問いに答えなさい。 〈7 点×2〉

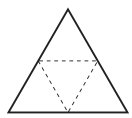


□(1) △ADF∽△CDE となることを証明しなさい。

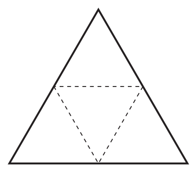
□(2) AE=3 cm、EC=2 cm、CD=6 cm のとき、BC の長さを求めなさい。

8 右の図は、正四面体 A、B の展開図である。展開図の面積がそれぞれ40 cm²、90 cm² であるとき、正四面体 A の体積は正四面体 B の体積の何倍か答えなさい。 〈6 点〉

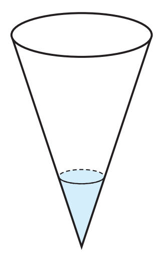
A の展開図



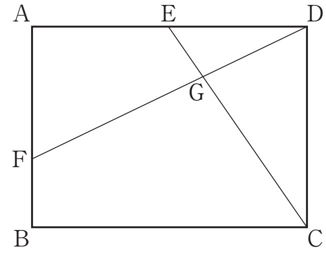
B の展開図



9 右の図のような円錐形の容器に、水を60 cm³ 入れたら、容器の$\frac{1}{3}$の深さまで水が入った。あと何cm³ 入れたら、水は容器いっぱいになるか答えなさい。 〈7 点〉

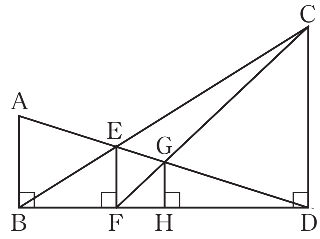


10 右の図の長方形 ABCD で、E は辺 AD の中点である。また、F は辺 AB 上の点で、G は CE と DF との交点である。AB=6cm、AD=8cm、AF=4cm のとき、四角形 BCGF の面積を求めなさい。 〈7 点〉



チャレンジ問題

1 右の図で、AB、CD、EF、GH はすべて BD に垂直である。AB＝6cm、EF＝4cm のとき、次の問いに答えなさい。

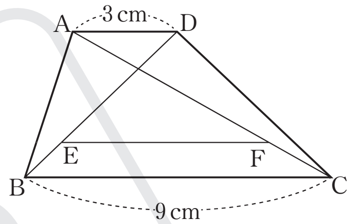


□(1)　CD の長さを求めなさい。

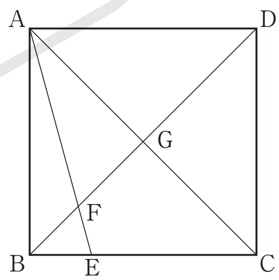
□(2)　GH の長さを求めなさい。

2 右の図のように、AD∥BC、AD＝3cm、BC＝9cm の台形 ABCD がある。

□対角線 DB、AC をそれぞれ 3：1 に分ける点を E、F とするとき、EF の長さを求めなさい。



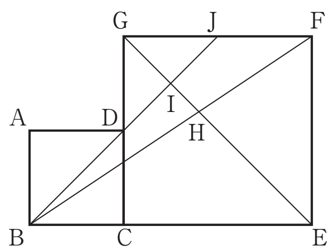
3 右の図で、四角形 ABCD は正方形であり、E は辺 BC 上の点で、BE：EC＝1：3 である。また、F、G はそれぞれ DB と AE、AC との交点である。AB＝10cm のとき、次の問いに答えなさい。



□(1)　FE の長さは AF の長さの何倍か答えなさい。

□(2)　△AFG の面積を求めなさい。

4 右の図の四角形 ABCD、CEFG は 1 辺の長さがそれぞれ 2cm、4cm の正方形で、3 点 B、C、E は一直線上にある。BF と EG との交点を H、BD の延長と EG、FG との交点をそれぞれ I、J とする。このとき、次の問いに答えなさい。



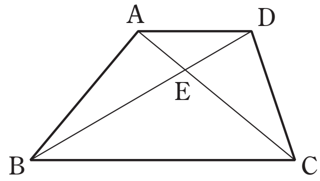
□(1)　GI：IH を求めなさい。

□(2)　△FGH の面積は△GIJ の面積の何倍か答えなさい。

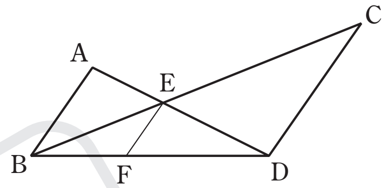
思考力—実践力をのばす問題

1 次の問いに答えなさい。

□(1) 図で、四角形 ABCD は AD∥BC の台形、E は線分 AC と DB との交点である。AD＝6 cm、AE＝3 cm、EC＝7 cm のとき、BC の長さは何 cm か、求めなさい。〈愛知〉

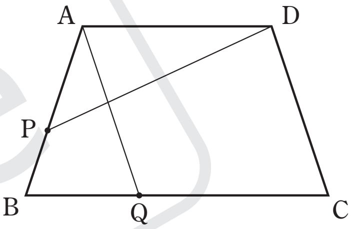


□(2) 右の図で、AB、CD、EF は平行です。AB＝2 cm、CD＝3 cm のとき、EF の長さを求めなさい。〈埼玉 24〉



2 右の**図 1** で、四角形 ABCD は、AD∥BC、AB＝DC、AD＜BC の台形である。点 P は、辺 AB 上にある点で、頂点 A、頂点 B のいずれにも一致しない。点 Q は、辺 BC 上にある点で、頂点 B、頂点 C のいずれにも一致しない。頂点 A と点 Q、頂点 D と点 P をそれぞれ結ぶ。次の各問に答えよ。〈東京〉

図 1

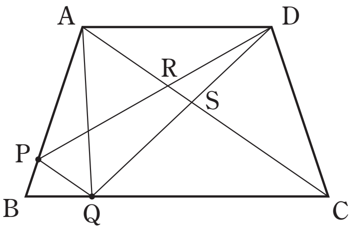


□(1) **図 1** において、AQ∥DC、∠AQC＝110°、∠APD＝a° とするとき、∠ADP の大きさを表す式を、次の**ア**～**エ**のうちから選び、記号で答えよ。

ア $(140-a)$度　　**イ** $(110-a)$度　　**ウ** $(70-a)$度　　**エ** $(40-a)$度

(2) 右の**図 2** は、**図 1** において、頂点 A と頂点 C、頂点 D と点 Q、点 P と点 Q をそれぞれ結び、線分 AC と線分 DP との交点を R、線分 AC と線分 DQ との交点を S とし、AC∥PQ の場合を表している。次の①、②に答えよ。

図 2



□① △ASD ∽△CSQ であることを証明せよ。

□② 次の［　］の中の「**お**」「**か**」「**き**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図 2 において、AP : PB＝3 : 1、AD : QC＝2 : 3 のとき、
△DRS の面積は、台形 ABCD の面積の $\dfrac{\boxed{お}}{\boxed{かき}}$ 倍である。