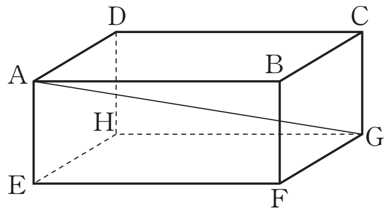
28　三平方の定理と空間図形（1）

テーマ
① 立方体や直方体に三平方の定理を応用して，対角線の長さや線分で囲まれた図形の面積などを求める。
② 立体，とくに立方体を平面で切ったときの切り口の図形を調べる。
③ 立体の表面にそって２点を線で結ぶとき，その最短経路を調べる。

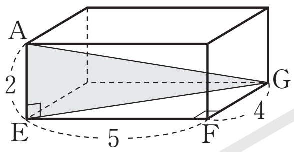
学習1　直方体・立方体の対角線の長さ

例題　右の図の直方体で，AB＝5cm，AD＝4cm，AE＝2cm のとき，対角線AGの長さを求めなさい。



解法　空間の中に，AGを辺にもつ直角三角形を見つけ，三平方の定理を利用する。

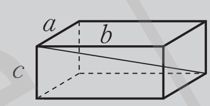
△AEGで，∠AEG＝90° だから，
三平方の定理より，
$AG^2=AE^2+EG^2=2^2+EG^2$
ここで，直角三角形EFGで，
$EG^2=EF^2+FG^2=5^2+4^2$
よって，$AG^2=2^2+5^2+4^2=45$
$AG>0$ より，$AG=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$（cm）



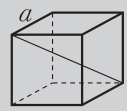
注　AE⊥面EFGHより，AE⊥EG

答　$3\sqrt{5}$ cm

POINT
［対角線の長さ］
直方体　　立方体



$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

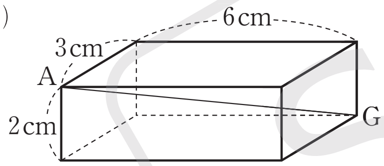


$\sqrt{3}\,a$

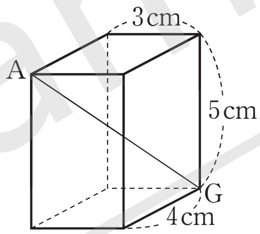
確認問題

1　次の図の直方体や立方体で，対角線AGの長さを求めなさい。

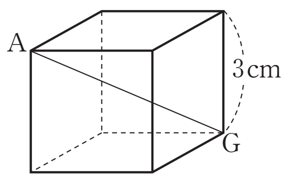
□(1)



□(2)

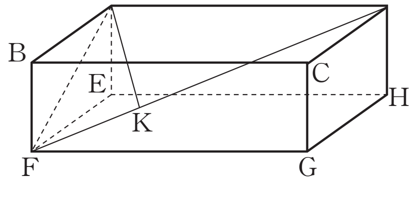


□(3)　立方体



□**2**　対角線の長さが 3 cm である立方体の体積を求めなさい。

3　右の図は，$AB=\sqrt{2}$，AD＝3，AE＝1 の直方体であり，線分AKは，Aから対角線DFにひいた垂線である。次の問いに答えなさい。



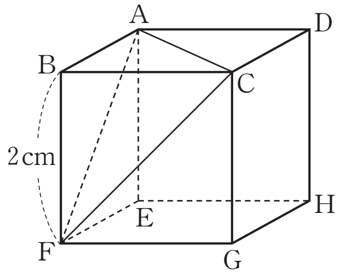
□(1)　△AFDの面積を求めよ。

□(2)　対角線DFの長さを求めよ。

□(3)　線分AKの長さを求めよ。

学習2 直方体・立方体への利用

例題 右の図のように，1辺の長さが2cmの立方体がある。次の問いに答えなさい。



(1) 3点A，F，Cを頂点とする△AFCの面積を求めよ。

(2) 点Bと面AFCとの距離を求めよ。

解法 (1) △ABCは直角二等辺三角形で，AC＝AB×$\sqrt{2}$＝$2\sqrt{2}$(cm)

AF，FCについても同様だから，△AFCは1辺$2\sqrt{2}$cmの正三角形で，高さは($\sqrt{2}\times\sqrt{3}$)cmだから，面積は，

$$\triangle AFC=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})=2\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

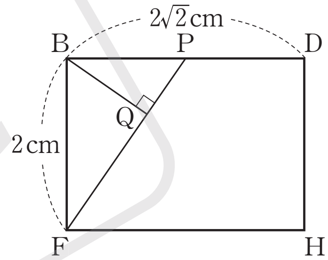
(2) 三角錐B-AFCの体積は，$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times2=\frac{4}{3}$(cm^3)

点Bと面AFCとの距離を$h$cmとすると，三角錐B-AFCの体積について，

$$\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times h=\frac{4}{3}\qquad h=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{cm}$$

［**別解**］ 面BFHDとACの交点をPとし，点Bから面AFCにひいた垂線をBQとする。

面BFHDで考えると，右の図のようになる。



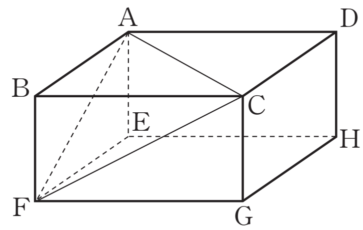
FP＝$\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$(cm)より，

△BFPの面積について，$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times BQ=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2$　　BQ＝$\frac{2\sqrt{3}}{3}$cm

答 (1) $2\sqrt{3}$cm^2　(2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$cm

確認問題

4 右の図は，AB＝AD＝2，AE＝1の直方体を表している。次の問いに答えなさい。



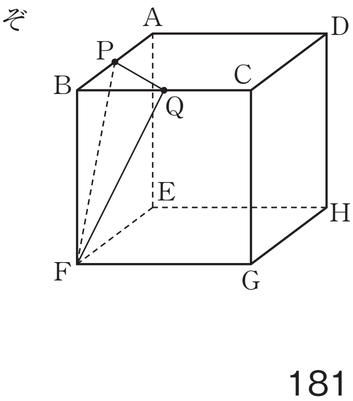
□(1) △AFCの3辺の長さをそれぞれ求めよ。

□(2) △AFCの面積を求めよ。

□(3) 三角錐B-AFCの体積を求めよ。

□(4) 点Bと面AFCとの距離を求めよ。

5 右の図のように，1辺の長さが12cmの立方体があり，辺AB，BCの中点をそれぞれP，Qとする。次の問いに答えなさい。



□(1) △FPQの面積を求めよ。

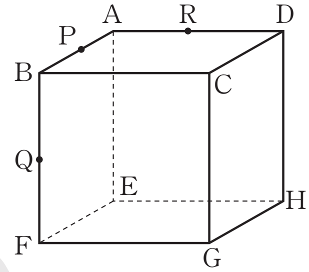
□(2) 点Bから面PFQにひいた垂線をBRとするとき，BRの長さを求めよ。

学習 3　立方体の切り口★

基本CHECK

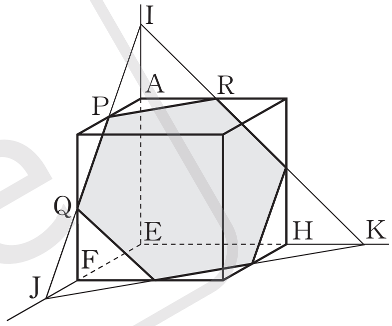
●**切り口の図形**…立方体を１つの平面で切ったときの切り口の図形について，
① 図形の辺は，立方体の面上にできる。
② 立方体の平行な面には，平行な辺ができる。
③ 切り口の辺の延長線を利用する。

例題 右の図は，１辺の長さが２の立方体で，点P，Q，Rはそれぞれ辺AB，BF，ADの中点である。３点P，Q，Rを通る平面でこの立体を切ったとき，次の問いに答えなさい。



(1) 切り口はどんな図形か。
(2) 切り口の図形の周の長さを求めよ。

解法 (1) 線分PQ，PRは切り口の図形の辺となる。
直線PQが直線AE，EFと交わる点をそれぞれＩ，Ｊとする。
直線IRと直線EHの交点をKとする。
こうしてできる３直線IJ，IK，JKが立方体の各辺と交わる点をとり，これらの点を結ぶと，切り口の図形となり，右の影をつけた部分の正六角形となる。



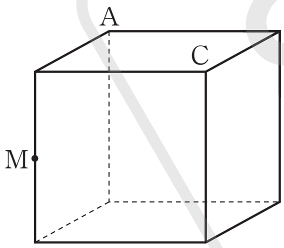
(2) △APRで，AP＝AR＝1 より，PR＝$\sqrt{2}$
よって，正六角形の周の長さは，$6\sqrt{2}$

答 (1) 正六角形　(2) $6\sqrt{2}$

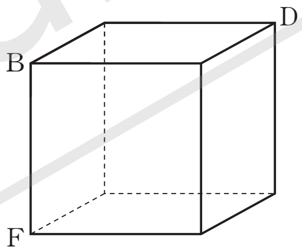
確認問題

6★ １辺の長さが４cmの立方体を，次の図のような３点を通る平面で切ったとき，切り口はどんな図形になるか。ただし，点M，Nはそれぞれの辺の中点とする。また，切り口の図形の面積を求めなさい。

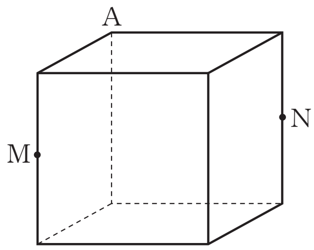
□(1)



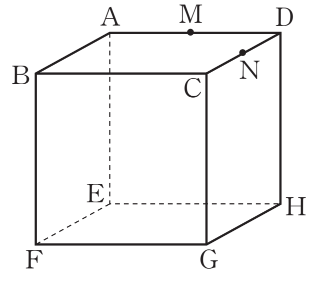
□(2)



□(3)



7★ 右の図は，１辺の長さが４の立方体で，点M，Nはそれぞれ辺AD，CDの中点である。３点E，M，Nを通る平面でこの立方体を切るとき，次の問いに答えなさい。



□(1) 切り口の図形の周の長さを求めよ。

□(2) 切り口の図形の面積を求めよ。

学習 4　最短経路

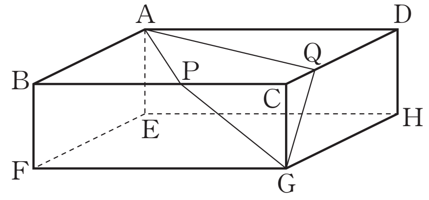
基本CHECK

●**最短経路**…立体の表面にそって2点を結ぶときの最短経路は，展開図の上では，2点を結ぶ線分で表される。

例題　右の図は，AB＝4cm，AD＝6cm，AE＝2cm の直方体である。これについて，次の問いに答えなさい。

(1)　辺BC上に点Pをとるとき，AP＋PG の最小値を求めよ。

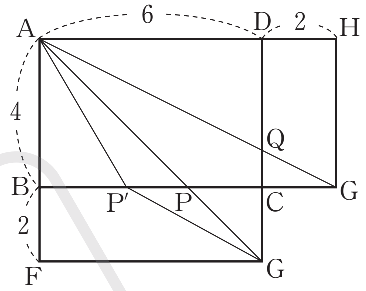
(2)　辺CD上に点Qをとるとき，AQ＋QG の最小値を求めよ。



解法　点P，Qがある辺BC，CDを切り離さない展開図(線分が通らない面は除いてもよい)をかき，線分AGをかき入れる。

(1)　線分AGと辺BCの交点をPとするとき，AP＋PG は最小となる。(右の図で，AG＜AP′＋P′G)
最小値は，△AFGで，三平方の定理より，
$AP+PG=AG=\sqrt{(4+2)^2+6^2}=6\sqrt{2}$ (cm)

(2)　$AQ+QG=AG=\sqrt{4^2+(2+6)^2}=4\sqrt{5}$ (cm)

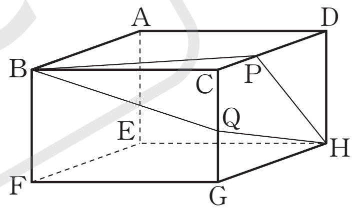


答　(1)　$6\sqrt{2}$ cm　　(2)　$4\sqrt{5}$ cm

確認問題

8　右の図は，AB＝4cm，AD＝5cm，AE＝3cm の直方体である。これについて，次の問いに答えなさい。

□(1)　辺CD上に点Pをとるとき，BP＋PH の最小値を求めよ。
また，そのときのCPの長さを求めよ。

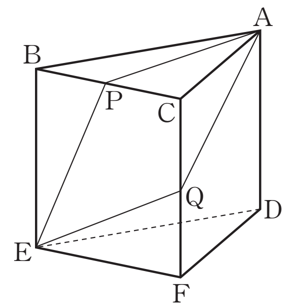


□(2)　辺CG上に点Qをとるとき，BQ＋QH の最小値を求めよ。
また，そのときのBQの長さを求めよ。

9　右の図は，BC＝4cm，CA＝3cm，AD＝5cm，∠BCA＝90° の三角柱である。これについて，次の問いに答えなさい。

□(1)　辺BC上に点Pをとるとき，AP＋PE の最小値を求めよ。

□(2)　辺CF上に点Qをとり，AQ＋QE の値が最小になるようにするとき，QFの長さを求めよ。



□**10**　右の図は，底面の半径が1cm，高さがπcmの円柱であり，線分ABは母線を表している。**図1**のように，円柱の側面にAからBまでひもをかけるとき，ひもの長さの最小値を求めなさい。
また，**図2**のようにかけるときのひもの長さの最小値は，**図1**のときの2倍といえるか，答えなさい。

図1

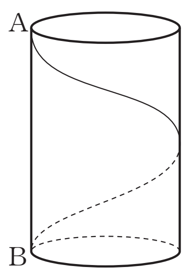
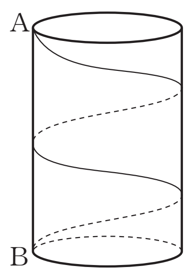
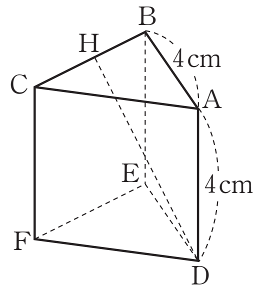


図2



演 習 問 題 A

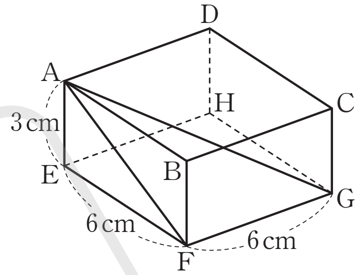
1 〈直方体・立方体の対角線の長さ〉 次の問いに答えなさい。



▣(1)　縦５cm，横８cm，高さ３cmの直方体の対角線の長さを求めよ。

□(2)　右の図は，AB＝4cm，AD＝4cm の正三角柱ABC-DEF で，点Hは BCの中点である。線分HDの長さを求めよ。

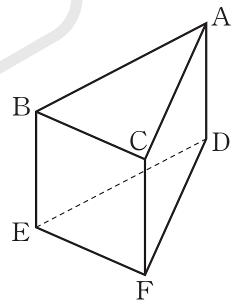
2 〈直方体への利用〉 右の図のように，底面が１辺6cmの正方形で，高さが3cmの直方体がある。このとき，次の問いに答えなさい。



□(1)　△AFGの面積を求めよ。

□(2)　この直方体の対角線AG上に，FP⊥AGとなる点Pをとる。線分FPの長さを求めよ。

3★ 〈三角柱への利用〉 右の図は三角柱ABC-DEFであり，BC＝BE＝2cm，AB＝4cm，∠ABC＝90° である。次の問いに答えなさい。



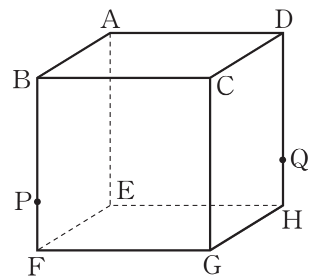
▣(1)　３点B，D，Fを頂点とする△BFDの面積を求めよ。

▣(2)　３点B，D，Fをふくむ平面と点Eとの距離を求めよ。

□**4★ 〈立方体の切り口〉** 右の図は１辺の長さが６cmの立方体で，点P，Qはそれぞれ辺BF，DH上にあり，BP＝DQ＝4cm である。

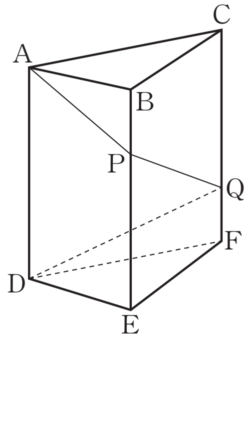
３点A，P，Qを通る平面で，この立方体を切ったとき，切り口の図形はどんな図形か。

また，その図形の周の長さを求めなさい。



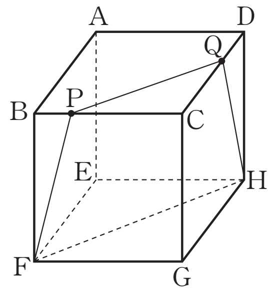
▣**5 〈最短経路〉** 右の図のような，底面が直角三角形で，AB＝3cm，BC＝4cm，AD＝6cm，∠ABC＝90° の三角柱がある。三角柱の辺BE，CF上にそれぞれ点P，Qをとり，AP＋PQ＋QD が最小になるようにする。

このとき，線分PQの長さを求めなさい。



演習問題 B

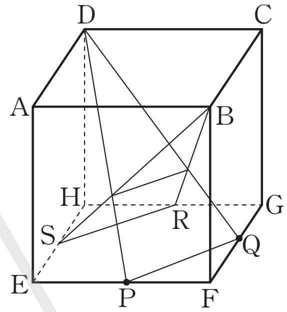
1　右の図のように，1辺の長さが5cmの立方体ABCD−EFGHがある。2点P，Qはそれぞれ頂点B，Dから同時に出発して，立方体の辺BC，DC上を，毎秒1cmの速さでCに向かって動くものとする。次の問いに答えなさい。



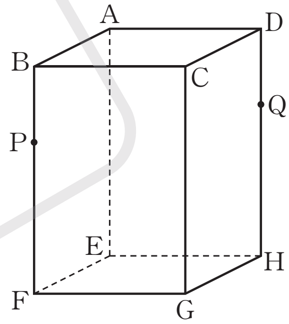
□(1)　点P，Qが動き始めてから，2秒後の四角形PFHQの面積を求めよ。

□(2)　点P，Qが動き始めてから，3秒後の立体PCQ−FGHの体積を求めよ。

□**2**　右の図のように，1辺の長さが6cmの立方体において，辺EF，FG，GH，HEの中点をそれぞれP，Q，R，Sとする。このとき，△BRSと△DPQとが交わってできる線分の長さを求めなさい。



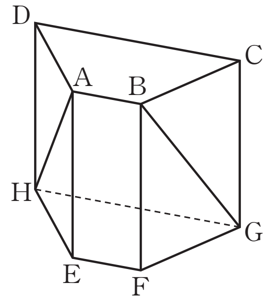
3　右の図の直方体ABCD−EFGHにおいて，AB＝AD＝4cm，AE＝6cmである。辺BF，DH上に，それぞれ点P，QをBP＝DQ＝2cmとなるようにとり，この直方体を3点A，P，Qを通る平面で切って2つに分けるとき，次の問いに答えなさい。



□(1)　切り口としてできる図形の面積を求めよ。

□(2)　頂点Eを含む立体の体積を求めよ。

4　右の図で，立体ABCD−EFGHは底面が台形の四角柱で，AB∥DCである。
AB＝3cm，AE＝7cm，CB＝DA＝5cm，DC＝9cmのとき，次の問いに答えなさい。



□(1)　台形ABCDの面積を求めよ。

□(2)　立体ABEFGHの体積を求めよ。

5　**図1**に示した立体ABC−DEFは，AB＝AD＝6cm，AC＝4cm, ∠BAC＝90°で側面がすべて長方形の三角柱である。また，辺BE上の点でBM：ME＝2：1となる点をM，辺CFの中点をNとする。次の問いに答えなさい。

図1

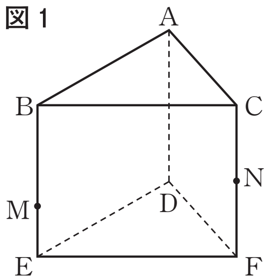
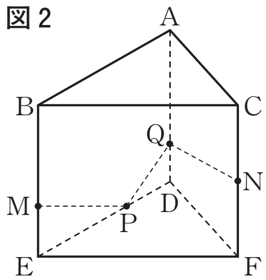


図2



□(1)　△ACEの面積を求めよ。

□(2)　立体A−BMNCの体積を求めよ。

□(3)　**図2**は，**図1**において，辺DE上にある点をP，辺AD上にある点をQとし，点Mと点P，点Pと点Q，点Qと点Nをそれぞれ結んだ場合を表している。
MP＋PQ＋QN＝$d$cmとするとき，dの最小値を求めよ。