

27

立体の体積と表面積 (1)

基本事項

- ① 角柱、円柱の体積は、(底面積)×(高さ)で求められる。
- ② 角錐、円錐の体積は、 $\frac{1}{3}$ ×(底面積)×(高さ)で求められる。
- ③ 立体の表面全体の面積を**表面積**という。また、1つの底面の面積を**底面積**、側面全体の面積を**側面積**という。

例題 1 角柱・円柱の体積と表面積

次の問いに答えなさい。

- (1) 図1の三角柱の体積と表面積を求めよ。
- (2) 図2の円柱の体積と表面積を求めよ。

解法 柱体の底面積を S 、高さを h 、底面の周の長さを l とすると、

$$\begin{aligned} (\text{体積}) &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = Sh \\ (\text{表面積}) &= 2 \times (\text{底面積}) + (\text{側面積}) = 2S + hl \end{aligned}$$

(1) 体積は、 $(\frac{1}{2} \times 3 \times 4) \times 5 = 30 (\text{cm}^3)$

表面積は、 $2 \times (\frac{1}{2} \times 3 \times 4) + 5 \times (3 + 4 + 5) = 72 (\text{cm}^2)$

(2) 体積は、 $(\pi \times 4^2) \times 8 = 128\pi (\text{cm}^3)$

表面積は、 $2 \times (\pi \times 4^2) + 8 \times (2\pi \times 4) = 96\pi (\text{cm}^2)$

答 (1) 体積… 30 cm^3 、表面積… 72 cm^2 (2) 体積… $128\pi \text{ cm}^3$ 、表面積… $96\pi \text{ cm}^2$

図1

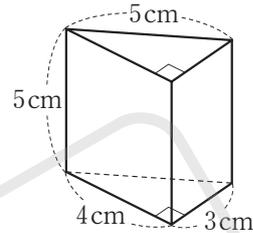
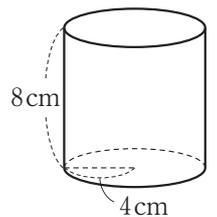


図2



POINT

角柱の体積 $V = Sh$

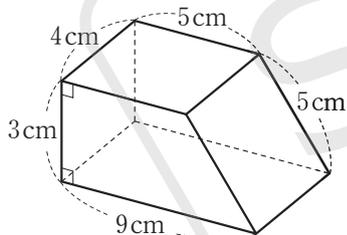
円柱の体積 $V = Sh = \pi r^2 h$

柱体の表面積 $= 2S + hl$

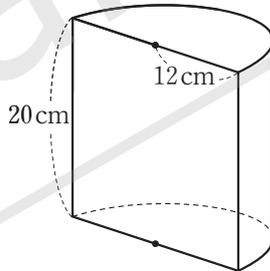
確認問題

1 次の立体の体積と表面積を求めなさい。

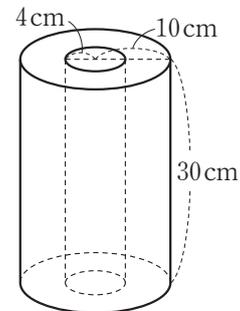
回(1)



回(2)

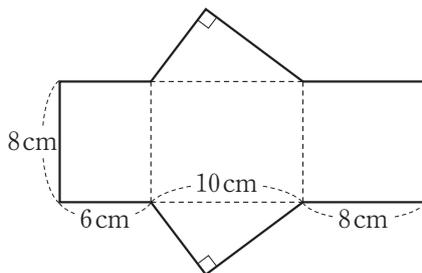


回(3)

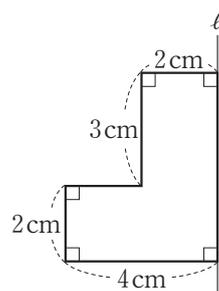


2 次の問いに答えなさい。

回(1) 下の図は、ある角柱の展開図である。この角柱の体積と表面積を求めよ。



回(2) 下の図形を、直線 l を軸として1回転させてできる立体の体積と表面積を求めよ。



例題 2 角錐・円錐の体積

次の問いに答えなさい。

- (1) 図1の四角錐の体積を求めよ。
 (2) 図2の円錐の体積を求めよ。

解法 錐体の体積は、 $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$

角錐の底面積を S 、高さを h とすると、体積 V は

$$V = \frac{1}{3}Sh \text{ と表せる。}$$

円錐の底面の半径を r 、高さを h とすると、体積 V は、 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$(1) \frac{1}{3} \times 3 \times 4 \times 5 = 20 (\text{cm}^3)$$

$$(2) \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi (\text{cm}^3)$$

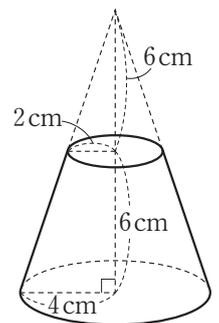
答 (1) 20 cm^3 (2) $12\pi \text{ cm}^3$

確認問題

3 次の問いに答えなさい。

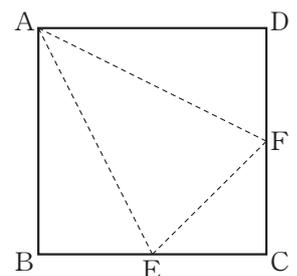
- (1) 底面積が 10 cm^2 、高さが 6 cm の五角錐の体積を求めよ。
 □(2) 底面が1辺 6 cm の正方形で、高さが 7 cm の正四角錐の体積を求めよ。
 □(3) 底面積が $8\pi \text{ cm}^2$ 、高さが 9 cm の円錐の体積を求めよ。
 □(4) 底面の半径が 5 cm 、高さが 12 cm の円錐の体積を求めよ。

- 4 右の図のような大きい円錐から小さい円錐を取り除いた立体がある。この立体の体積を求めなさい。



5 右の図のような1辺 8 cm の正方形 $ABCD$ があり、辺 BC 、 CD の中点をそれぞれ E 、 F とする。 AE 、 EF 、 FA を折り曲げて、 B 、 C 、 D が1点に重なるようにして三角錐をつくるとき、次の問いに答えなさい。

- (1) この三角錐の体積を求めよ。
 □(2) 三角形 AEF の面積を求めよ。
 □(3) 三角形 AEF を底面とするとき、この三角錐の高さを求めよ。



例題 3 角錐・円錐の表面積

次の問いに答えなさい。

- (1) 図1の正四角錐の表面積を求めよ。
 (2) 図2の円錐の表面積を求めよ。

解法 (1) この正四角錐の底面は1辺6 cmの正方形で、側面は、底辺6 cm、高さ10 cmの二等辺三角形4つでできている。表面積は、

$$(\text{底面積}) + (\text{側面積}) = 6 \times 6 + 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 10 \right) = 156 (\text{cm}^2)$$

- (2) 円錐の底面の半径を r 、母線の長さを ℓ 、側面を展開したおうぎ形の中心角を a° とすると、 $\frac{a}{360} = \frac{r}{\ell}$ が成り立つ。

したがって、側面積は、 $\pi \times 5^2 \times \frac{a}{360} = \pi \times 5^2 \times \frac{3}{5} = 15\pi$

表面積は、 $(\text{底面積}) + (\text{側面積}) = \pi \times 3^2 + 15\pi = 24\pi (\text{cm}^2)$

答 (1) 156 cm^2 (2) $24\pi \text{ cm}^2$

図1

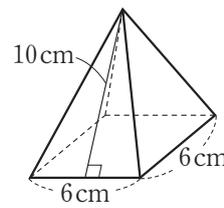
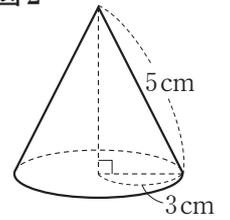


図2

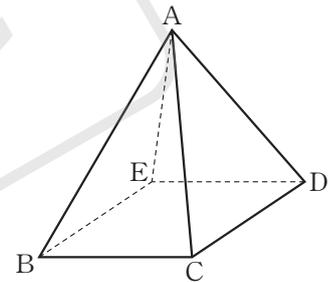


POINT
 円錐の展開図

$$\frac{a}{360} = \frac{r}{\ell}$$

確認問題

- 6 右の図のような、底面が1辺4 cmの正方形の正四角錐A-BCDEがある。頂点Aから辺CDにひいた垂線の長さが6 cmのとき、この正四角錐の表面積を求めなさい。

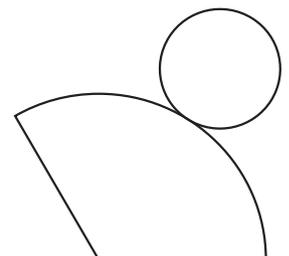


7 次の円錐の表面積を求めなさい。

- 回(1) 底面の半径が5 cm、母線の長さが10 cmの円錐
 □(2) 底面の半径が4 cm、母線の長さが16 cmの円錐
 □(3) 底面の半径が14 cm、母線の長さが21 cmの円錐

8 右の図は、円錐の展開図である。底面の半径が3 cm、おうぎ形の中心角が 120° であるとき、次の問いに答えなさい。

- 回(1) この円錐の母線の長さを求めよ。
 回(2) この円錐の表面積を求めよ。



例題 4 球の体積と表面積

半径 6 cm の球の体積と表面積を求めなさい。

解法 体積 $\frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

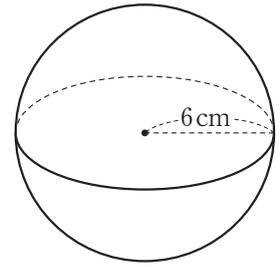
表面積 $4\pi \times 6^2 = 144\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

答 体積… $288\pi \text{ cm}^3$, 表面積… $144\pi \text{ cm}^2$

POINT
球の半径を r とすると

体積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

表面積 $S = 4\pi r^2$

**確認問題**

9 次の球と半球の体積と表面積を求めなさい。

□(1) 半径 9 cm の球

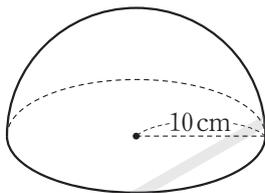
□(2) 半径 3 cm の球

□(3) 直径 8 cm の球

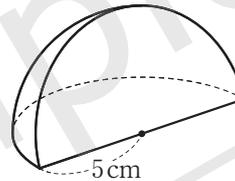
□(4) 半径 12 cm の半球

10 次の立体の体積と表面積を求めなさい。

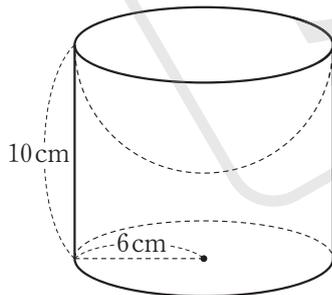
□(1) 半球



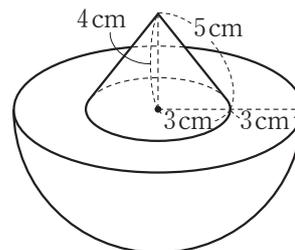
□(2) $\frac{1}{4}$ 球



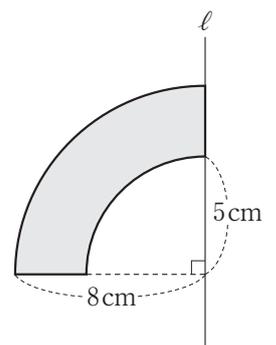
□(3) 円柱から半球をくりぬいた立体



□(4) 円錐と半球を組み合わせた立体



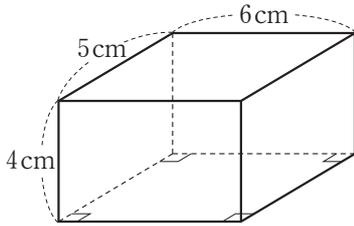
□11 半径 8 cm, 中心角 90° のおうぎ形から, 右の図のように, 半径 5 cm のおうぎ形を取り除いてできる図形を, 直線 l を軸として 1 回転させてできる立体の体積と表面積を求めなさい。



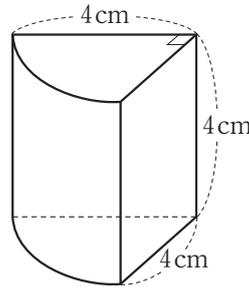
演習問題 A

1 【角柱・円柱の体積と表面積】 次の立体の体積と表面積を求めなさい。

□(1)

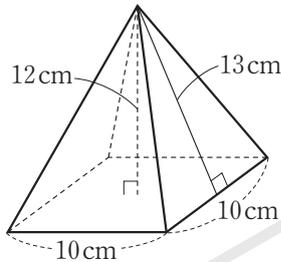


□(2)

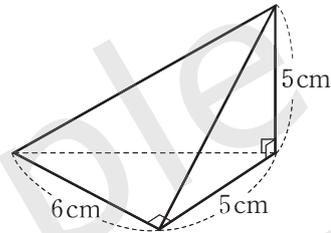


2 【角錐の体積と表面積】 次の問いに答えなさい。

□(1) 下の図のような正四角錐の体積と表面積を求めよ。

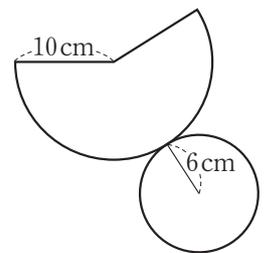
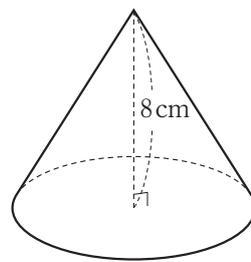


□(2) 下の図のような三角錐の体積を求めよ。



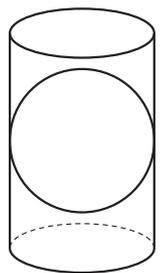
3 【円錐の体積と表面積】 右の図は、ある円錐の見取図と展開図である。次の問いに答えなさい。

□(1) この円錐の体積を求めよ。



□(2) この円錐の表面積を求めよ。

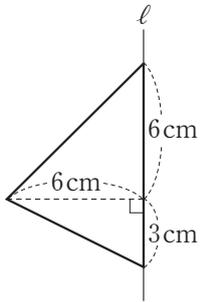
4 【球の体積】 右の図のように、底面の半径が2 cm、高さが6 cmの円柱がある。円柱の容器いっぱいに入っているところに、この円柱の側面に接する球を1つ完全に沈めるとき、あふれる水の体積を求めなさい。



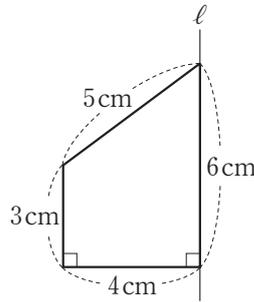
演習問題 B

1 次の図形を、直線 l を軸として1回転させてできる立体について、(1)は体積、(2)、(3)は体積と表面積をそれぞれ求めなさい。

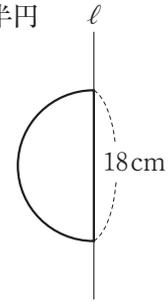
□(1)



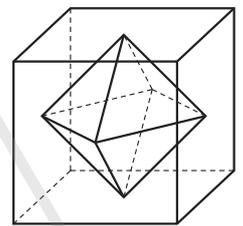
□(2)



□(3) 半円



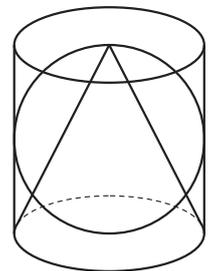
2 1辺の長さが12cmの立方体がある。この立方体の各面の中心を頂点とする正八面体を考えたとき、この正八面体の体積を求めなさい。



3 右の図のように、半径が5cmの球と、その球がちょうど入る円柱、その円柱にちょうど入る円錐がある。このとき、次の問いに答えなさい。

□(1) 円錐の体積を1としたとき、球、円柱の体積はいくらになるか求めよ。

□(2) 球と円柱の表面積の比をもっとも簡単な整数の比で求めよ。



4 三角柱ABC-DEFの容器があり、底面は $\angle DEF=90^\circ$ 、 $DE=EF=12\text{cm}$ の直角二等辺三角形で、高さADは18cmである。図1は、この容器を底面DEFが水平になるように置き、その中に水を16cmの深さまで入れ、底面ABCの位置で密閉したところを表したものである。いま、この容器を図2のように、四角形CBEFが底面となるように倒し、水平に置いた。このとき、水の深さを求めなさい。

図1

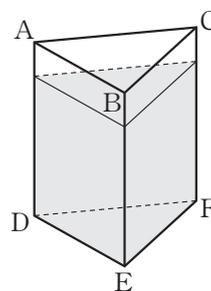


図2

