23　平行四辺形

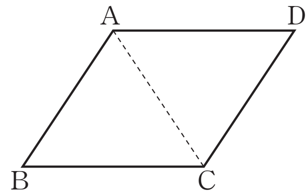
基本事項

❶　２組の対辺がそれぞれ平行な四角形を**平行四辺形**という。
平行四辺形ABCDを**▱ABCD**と書くことがある。

❷　四角形の向かい合う辺を**対辺**，向かい合う角を**対角**という。

例題 1　平行四辺形の性質

平行四辺形の性質「平行四辺形の２組の対辺はそれぞれ等しい」ことを右の図の▱ABCDで証明しなさい。



解法　仮定 AB∥DC，AD∥BC から，△ABC≡△CDA を証明して
結論 AB＝DC，AD＝BC を導く。

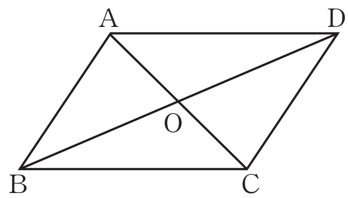
証明　対角線ACをひく。△ABCと△CDAにおいて，
共通な辺だから，AC＝CA ……①
平行線の錯角は等しいので，
AB∥DC より，∠BAC＝∠DCA ……②
AD∥BC より，∠BCA＝∠DAC ……③
①，②，③から，１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，△ABC≡△CDA
合同な図形では対応する辺はそれぞれ等しいので，AB＝CD，BC＝DA　すなわち，AB＝DC，AD＝BC
したがって，平行四辺形の２組の対辺はそれぞれ等しい。

POINT
平行四辺形の性質
①　２組の対辺はそれぞれ等しい。
②　２組の対角はそれぞれ等しい。
③　対角線はそれぞれの中点で交わる。

確認問題

□**1**　平行四辺形の性質「平行四辺形の２組の対角はそれぞれ等しい」ことを▱ABCDについて証明しなさい。

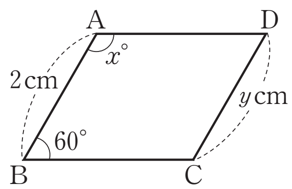
□**2**　▱ABCDで，対角線ACとBDの交点をOとするとき，OA＝OC，OB＝OD であることを，次のように証明する。□をうめて証明を完成しなさい。



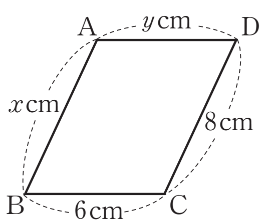
〔証明〕　△ABOと△CDOにおいて，
平行四辺形の対辺は等しいから，AB＝(1) ……①
AB∥DC より，平行線の錯角は等しいので，
∠ABO＝(2) ……②，∠BAO＝(3) ……③
①，②，③から，(4) がそれぞれ等しいので，△ABO≡△CDO
合同な図形では対応する辺はそれぞれ等しいので，OA＝OC，OB＝OD

3　次の図で，四角形ABCDは平行四辺形である。x，yの値を求めなさい。

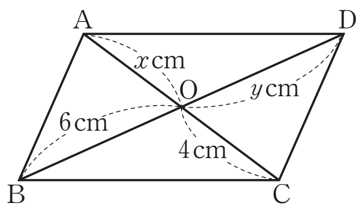
□(1)



□(2)

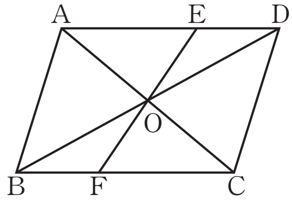


□(3)



例題 2　平行四辺形の性質の利用

右の図の▱ABCDの対角線の交点Oを通る直線が，辺AD，BCと交わる点をそれぞれE，Fとすると，AE＝CF であることを証明しなさい。

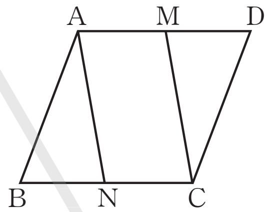


解法　長さが等しいことを証明する場合には，三角形の合同を利用することが多い。
この場合には，平行四辺形の性質により，△AOE≡△COF を証明する。

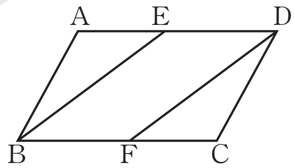
証明　△AOE と△COF において，
平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから，AO＝CO ……①
AD∥BC より，平行線の錯角は等しいので，∠OAE＝∠OCF ……②
また，対頂角は等しいから，∠AOE＝∠COF ……③
①，②，③から，１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，△AOE≡△COF
合同な図形では対応する辺の長さは等しいので，AE＝CF

確　認　問　題

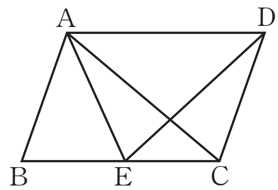
□**4**　▱ABCDの辺AD，BCの中点をそれぞれM，Nとするとき，AN＝CM であることを証明しなさい。



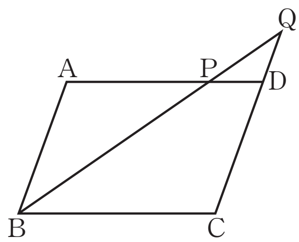
□**5**　▱ABCDにおいて，∠B，∠Dの二等分線と辺AD，BCとの交点をそれぞれE，Fとする。このとき，AE＝CF であることを証明しなさい。



□**6**　▱ABCDにおいて，辺BC上に AB＝AE となる点Eをとる。このとき，AC＝ED であることを証明しなさい。

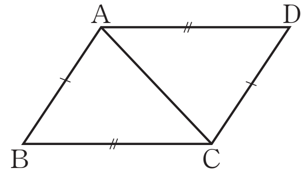


□**7**　▱ABCDにおいて，∠Bの二等分線が辺ADと交わる点をP，辺CDの延長と交わる点をQとするとき，DP＝DQ であることを証明しなさい。



例題 3　平行四辺形になるための条件

平行四辺形になる条件「２組の対辺がそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である」を，四角形ABCDで，AB＝DC，AD＝BC として証明しなさい。



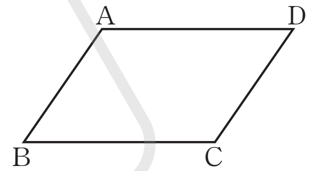
解法　仮定 AB＝DC，AD＝BC から，結論 AB∥DC，AD∥BC を導く。

証明　対角線ACをひく。
△ABCと△CDAにおいて，
共通な辺だから，AC＝CA ……①
仮定から，AB＝CD ……②，BC＝DA ……③
①，②，③から，３組の辺がそれぞれ等しいので，
△ABC≡△CDA
対応する角は等しいので，∠BAC＝∠DCA
錯角が等しいので，AB∥DC
同様にして，∠ACB＝∠CAD より，AD∥BC
よって，２組の対辺がそれぞれ平行なので，四角形ABCDは平行四辺形である。

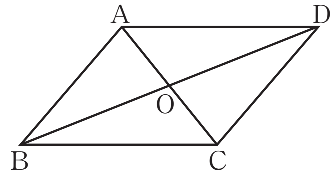
POINT
平行四辺形になるための条件
① ２組の対辺がそれぞれ平行である。（定義）
② ２組の対辺がそれぞれ等しい。
③ ２組の対角がそれぞれ等しい。
④ 対角線がそれぞれの中点で交わる。
⑤ １組の対辺が平行でその長さが等しい。

確認問題

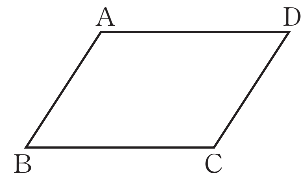
□**8**　「２組の対角がそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である」ことを，右の図の四角形ABCDで，∠A＝∠C，∠B＝∠D として証明しなさい。



□**9**　「対角線がそれぞれの中点で交わる四角形は平行四辺形である」ことを，右の図の四角形ABCDで，AO＝CO，BO＝DO として証明しなさい。

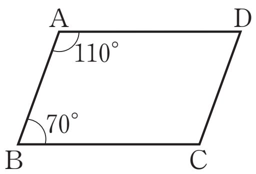


□**10**　「１組の対辺が平行でその長さが等しい四角形は平行四辺形である」ことを，右の図の四角形ABCDで，AD∥BC，AD＝BC として証明しなさい。

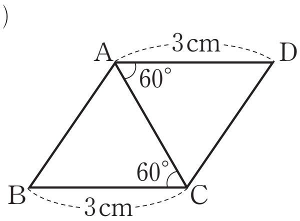


11　次の四角形はそれぞれ平行四辺形といえますか。平行四辺形といえるものは，その条件も答えなさい。

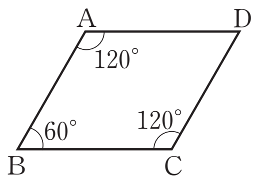
□(1)



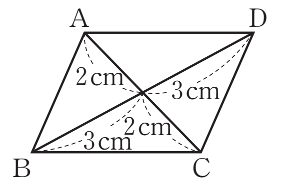
□(2)



□(3)

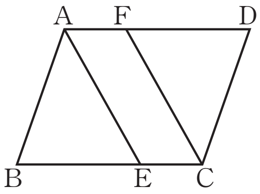


□(4)



例題 4　平行四辺形になることの証明

右の図のように，▱ABCDの辺BC，AD上に，BE＝DFとなるようにそれぞれ点E，Fをとる。このとき，四角形AECFは平行四辺形であることを証明しなさい。

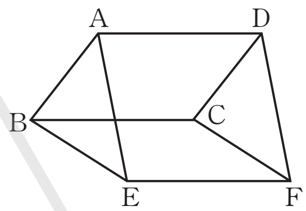


解法　平行四辺形になる条件のどれかを示す。
ここでは，「1組の対辺が平行でその長さが等しい」ことを使う。

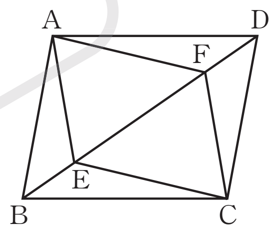
証明　AD∥BCから，AF∥EC ……①
平行四辺形の対辺は等しいから，AD＝BC，
仮定より，DF＝BEだから，AD－DF＝BC－BE　すなわち，AF＝EC ……②
①，②から，1組の対辺が平行でその長さが等しいので，四角形AECFは平行四辺形である。

確認問題

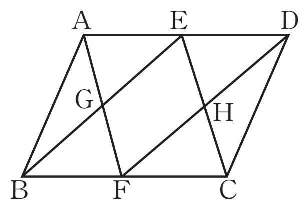
□**12**　右の図の四角形ABCD，四角形BEFCは辺BCを共有する平行四辺形である。このとき，四角形AEFDは平行四辺形であることを証明しなさい。



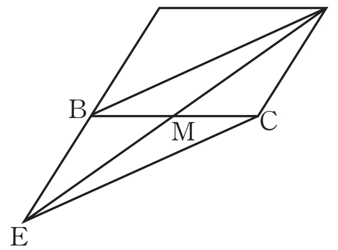
□**13**　右の図のように，▱ABCDの対角線BD上に，∠BAE＝∠DCFとなるように点E，Fをとる。このとき，四角形AECFは平行四辺形であることを証明しなさい。



□**14**　右の図の▱ABCDで，辺AD，BCの中点をE，F，AFとBEとの交点をG，CEとDFとの交点をHとするとき，四角形GFHEは平行四辺形であることを証明しなさい。



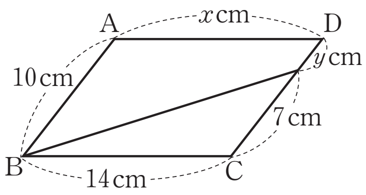
□**15**　右の図で，四角形ABCDは平行四辺形であり，Mは辺BCの中点である。ABの延長と，DMの延長との交点をEとするとき，四角形BECDは平行四辺形であることを証明しなさい。



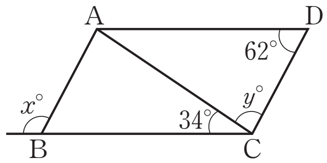
演 習 問 題 A

1 **［平行四辺形の性質］** 次の図で，四角形ABCDは平行四辺形である。x，yの値を求めなさい。

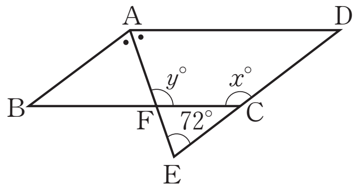
□(1)



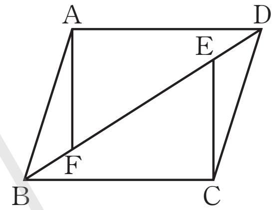
□(2)



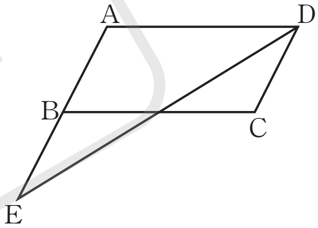
□(3)



□**2** **［平行四辺形の性質の利用］** 右の図のように，▱ABCDの対角線BD上に，BF＝DE となるように，２点E，Fをとる。このとき，CE∥AF となることを証明しなさい。



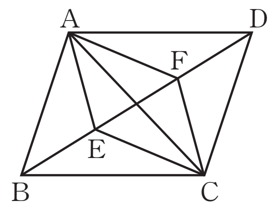
□**3** **［平行四辺形の性質の利用］** 右の図の▱ABCDにおいて，AD＝2AB とする。辺ABの延長上に，AB＝BE となる点Eをとり，EとDを結ぶ。このとき，DEは∠ADCの二等分線になることを証明しなさい。



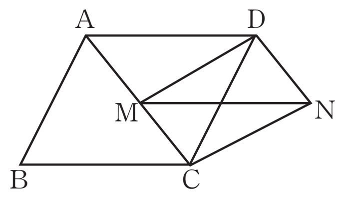
4 **［平行四辺形になるための条件］** 四角形ABCDが平行四辺形になるためには，次の(1)〜(3)の場合，示してある条件のほかにどのような条件がもう１つ必要か。すべての場合について，式で答えなさい。

□(1)　AD∥BC　　□(2)　AB＝DC　　□(3)　∠A＝∠C

□**5** **［平行四辺形になることの証明］** 右の図の▱ABCDにおいて，対角線BD上に，BE＝DF となる点E，Fをとる。このとき，四角形AECFは平行四辺形であることを証明しなさい。

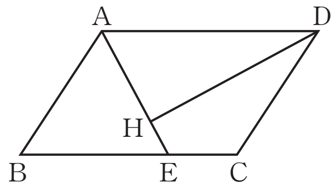


□**6** **［平行四辺形になることの証明］** 右の図の▱ABCDにおいて，対角線ACの中点をMとし，Mを通りADに平行な直線と，Dを通りACに平行な直線との交点をNとする。このとき，四角形MCNDは平行四辺形であることを証明しなさい。

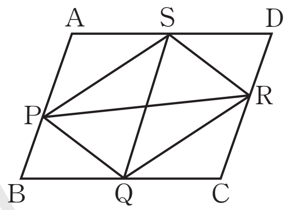


演習問題 B

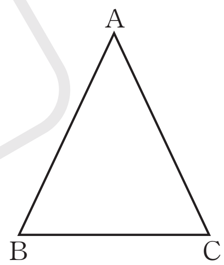
□**1**　右の図のように，▱ABCDの∠Aの二等分線と辺BCとの交点をEとする。頂点DからAEにひいた垂線とAEとの交点をHとすると，DHは∠Dを2等分することを証明しなさい。



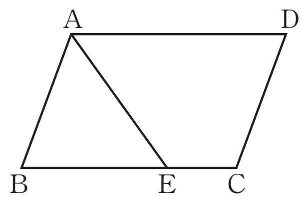
□**2**　右の図のように，▱ABCDで，AB，BC，CD，DA上にそれぞれ，点P，Q，R，SをAP＝CR，BQ＝DSとなるようにとった。PR，SQはそれぞれの中点で交わることを証明しなさい。



□**3**　右の図は，AB＝ACの二等辺三角形である。いま，底辺BC上に点Pをとり，Pを通ってABに平行な直線をひき，ACとの交点をQとする。次にPを通りACに平行な直線をひき，ABとの交点をRとする。このとき，PQ＋PR＝ABとなる。このことを，下線部分にしたがって図をかき，証明しなさい。



□**4**　AB＜ADである▱ABCDにおいて，∠BADの二等分線と辺BCとの交点をEとする。このとき，EC＋CD＝ADとなることを証明しなさい。



□**5**　右の図のように，▱ABCDの辺BC，CDをそれぞれ1辺とする正三角形BEC，正三角形CFDをつくり，3点A，E，Fをそれぞれ直線で結ぶ。△AEFは正三角形であることを証明しなさい。