15　関数 $y=ax^2$ の利用

基本事項
❶　数量関係が $y=ax^2$ で表されることがらについて，関数を利用して解く。
❷　平面上を移動する点や図形と，それらがつくる図形の面積などの変化を関数で表す。
❸　y が x の関数となるいろいろなことがらについてグラフをかく。

例題 1　関数 $y=ax^2$ の利用

高いところから物を自然に落としたとき，落ち始めてから x 秒間に落ちる距離を y m とすると，x と y の間には，およそ $y=5x^2$ の関係が成り立つ。次の問いに答えなさい。

(1)　落ち始めて３秒間では，何m落ちるか。

(2)　高さ80mのところから落とすと，地面に着くのは何秒後か。また，地面に着くまでの平均の速さを求めよ。

解法　(1)　$y=5x^2$ に $x=3$ を代入して，$y=5\times3^2=45$(m)

(2)　$y=80$ を代入して，$80=5\times x^2$　　$x^2=16$　　$x>0$ だから，$x=4$(秒)

平均の速さ$=\dfrac{落下した距離}{かかった時間}$　$\dfrac{y の増加量}{x の増加量}$ だから，変化の割合に等しい。$5\times(0+4)=20$(m/s)

答　(1)　45m　(2)　４秒後，秒速20m

確認問題

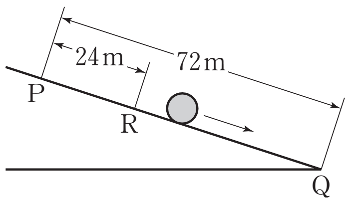
□**1**　物が自然落下するとき，落ち始めてから x 秒間に落ちる距離を y m とすると，およそ $y=5x^2$ の関係が成り立つ。高さ180mのところから落とすと，地面に着くのは何秒後ですか。
　また，地面に着く直前の１秒間の平均の速さは，毎秒何mですか。

2　自動車がブレーキをかけたとき，かけ始めてから止まるまでに進む距離を制動距離といい，制動距離は走っているときの速さの２乗に比例する。時速40kmで走っているときの制動距離を16mとして，次の問いに答えなさい。

□(1)　時速60kmで走っているときの制動距離を求めよ。

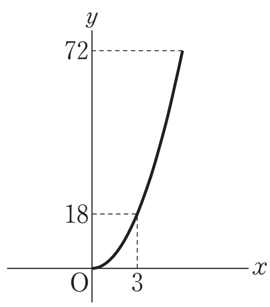
□(2)　制動距離が100mのとき，車は時速何kmで走っていたか。

3　右の図のように，鉄の玉を斜面上の長さ 72 m の線分PQの点Pより点Qまで転がした。転がし始めてから x 秒間で転がった距離を y m とする。そのとき，x と y との関係は，右下の図のような原点を頂点とする x が正の部分の放物線で表せた。次の問いに答えなさい。



□(1)　y を x の式で表せ。

□(2)　Qに到達するのは何秒後か。



□(3)　Ｓさんは，鉄の玉がＰ地点から転がり始めるのと同時に，斜面上の点Ｐから 24 m はなれた点Ｒをスタートし，秒速２m の速さで点Ｑに向かって歩いて下りた。玉がＳさんに追いつくのは何秒後か。

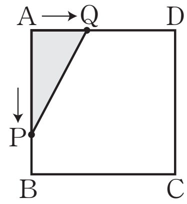
Sample

例題 2　動点と図形の面積

１辺が４cmの正方形ABCDがある。右の図のように，点P，Qは同時に頂点Aを出発して，点Pは辺AB，BC，CD上を点Dまで毎秒２cmの速さで動き，点Qは辺AD上を毎秒１cmの速さで動いてDに着いたら，Dで止まっている。

P，QがAを出発してから x 秒後の△APQの面積を y cm² とする。

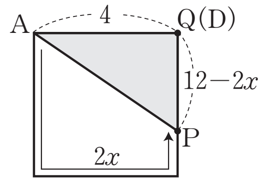
x の変域が $0<x\leqq 2$，$2\leqq x\leqq 4$，$4\leqq x<6$ のとき，それぞれ y を x の式で表しなさい。



解法　$0<x\leqq 2$ のとき，AP$=2x$cm，AQ$=x$cm より，$y=\frac{1}{2}\times 2x\times x=x^2$

$2\leqq x\leqq 4$ のとき，Pは辺BC上にあり，AQ$=x$cm　　$y=\frac{1}{2}\times x\times 4=2x$

$4\leqq x<6$ のとき，右の図から，$y=\frac{1}{2}\times(12-2x)\times 4=-4x+24$



答　$0<x\leqq 2$ のとき $y=x^2$，$2\leqq x\leqq 4$ のとき $y=2x$，$4\leqq x<6$ のとき $y=-4x+24$

確認問題

4　図１のように AB=6cm，BC=3cm の長方形ABCDがある。点PはBを出発して辺BC，CD，DA上を毎秒３cmの速さでAまで進む。点QはAを出発して辺AB，BC上を毎秒２cmの速さで進み，点PがAに着くと同時に止まる。

P，Qが同時に出発して x 秒後にできる△APQの面積を y cm² とするとき，次の問いに答えなさい。

□(1)　点Pが辺BC上，CD上，DA上を進むとき，それぞれ y を x の式で表せ。また，そのグラフを**図２**にかけ。

□(2)　△APQの面積が３cm² になるのは，出発してから何秒後か。すべて求めよ。

図１

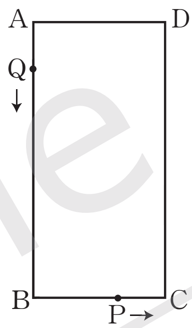
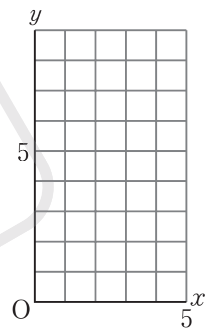


図２

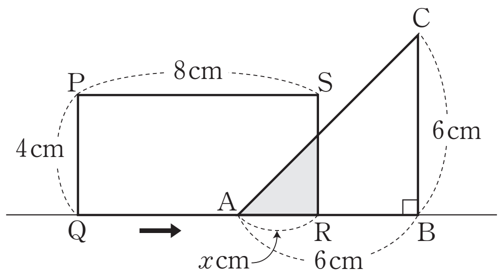


Sample

例題 3　重なる図形の面積

右の図のように，直角二等辺三角形ABCを固定し，長方形PQRSを矢印の方向に移動する。ARの長さが x cmのとき，２つの図形の重なった部分の面積を y cm² とする。ただし，QRは直線AB上を移動する。

x の変域が $0\leqq x\leqq 4$，$4\leqq x\leqq 6$，$6\leqq x\leqq 8$ のとき，それぞれ y を表す式をつくりなさい。

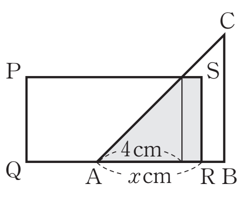


解法　$0\leqq x\leqq 4$ のとき，$y=\frac{1}{2}\times x\times x=\frac{1}{2}x^2$

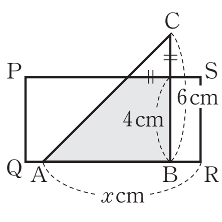
$4\leqq x\leqq 6$ のとき，$y=4\times(x-4)+\frac{1}{2}\times 4\times 4=4x-8$

$6\leqq x\leqq 8$ のとき，$y=\frac{1}{2}\times(2+6)\times 4=16$

$4\leqq x\leqq 6$ のとき



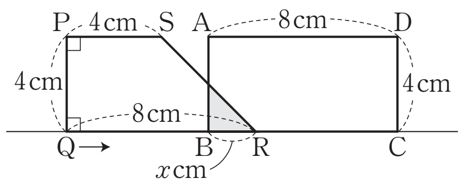
$6\leqq x\leqq 8$ のとき



答　$0\leqq x\leqq 4$ のとき，$y=\frac{1}{2}x^2$　$4\leqq x\leqq 6$ のとき，$y=4x-8$　$6\leqq x\leqq 8$ のとき，$y=16$

確認問題

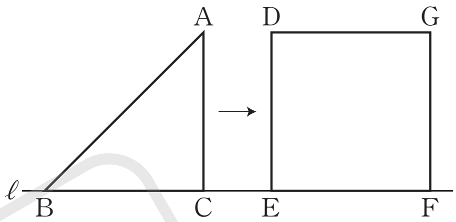
5　図のように，長方形ABCDを固定し，台形PQRSを矢印の方向に移動する。ただし，QRは直線BC上を移動するものとし，BRの長さが x cmのとき，２つの四角形が重なる部分の面積を y cm^2 とする。
　$0 \leqq x \leqq 8$ として，次の問いに答えなさい。



回(1)　x の変域が $0 \leqq x \leqq 4$，$4 \leqq x \leqq 8$ のとき，それぞれ y を x の式で表せ。

□(2)　y の変域を求めよ。

6　右の図のように，BC＝6 cmの直角二等辺三角形ABCとEF＝6 cmの正方形DEFGが，直線 ℓ 上に並んでいる。正方形DEFGは固定されているものとする。△ABCを矢印の方向に毎秒1 cmの速さで移動させる。辺ACが辺DEに重なってから x 秒後に２つの図形が重なっている部分の面積を y cm^2 とする。次の問いに答えなさい。



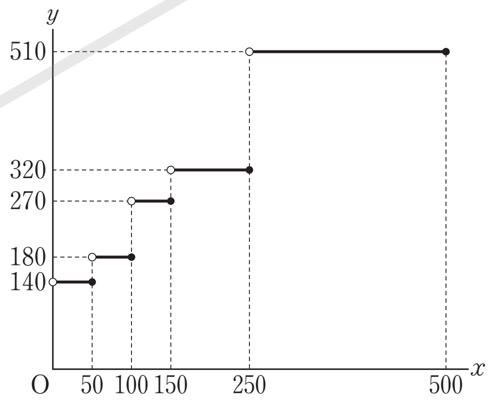
□(1)　x の変域が $0 \leqq x \leqq 6$ のとき，y を x の式で表せ。

□(2)　x の変域が $6 \leqq x \leqq 12$ のとき，y を x の式で表せ。

□(3)　$y=10$ となるときの x の値をすべて求めよ。

例題 4　いろいろな事象と関数

右のグラフは，定形外郵便物について，重さが x gの郵便物を送るときの料金を y 円として，x と y の関係を表したものである。
次の問いに答えなさい。



(1)　次の x の値に対応する y の値を求めよ。
　①　$x=80$　　　②　$x=150$

(2)　$y=320$ となるとき x の変域を求めよ。

解法　x の値を決めると，それに対応して y の値がただ１つに決まるから，y は x の関数である。
グラフでは，その値をふくむ点を•，ふくまない点を◦で表す。

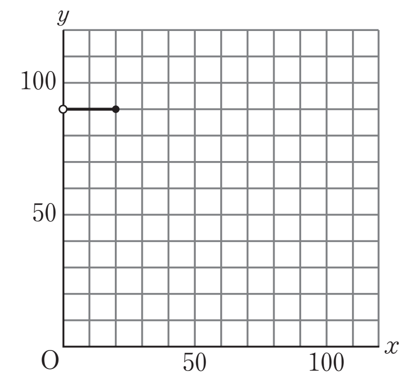
答　(1)　①　$y=180$　　②　$y=270$　　(2)　$150 < x \leqq 250$

確認問題

7　下の表は，ある電話会社を使って電話をかけるときの，通話する２地点間の距離と10円で通話できる時間の関係を表している。

距離	20km まで	30km まで	60km まで	100km まで	100kmを こえる
時間	90秒	60秒	45秒	30秒	22.5秒

次の問いに答えなさい。



□(1)　50km離れた２地点間で６分間通話すると，料金は何円か。

回(2)　２地点間の距離が x kmのとき，10円で通話できる時間を y 秒として，x と y の関係を表すグラフを，右の図に完成せよ。

Sample

演 習 問 題 A

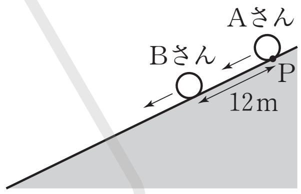
1 ［関数 $y=ax^2$ の利用］ 次の問いに答えなさい。

▣(1)　物が落ち始めてから x 秒間に落ちる距離を y m とすると，およそ $y=5x^2$ の関係が成り立つ。320 m の高さから物を落とすとき，落ち始めてから地面に着くまでの平均の速さを求めよ。
　また，この平均の速さと１秒間の平均の速さが等しくなるのは，何秒後から何秒後までの１秒間か。

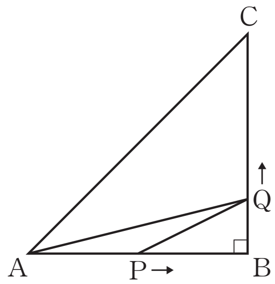
▣(2)　自動車がブレーキをかけたとき，かけ始めてから止まるまでに進む距離を制動距離といい，走っていたときの速さの２乗に比例する。時速60 km で走っていたときの制動距離を 20 m とすると，制動距離を 10 m にするには，時速何 km の速さで走っていなければならないか。

□(3)　振り子の周期（１往復するのにかかる時間）を x 秒，振り子の長さを y m とすると，$y=\frac{1}{4}x^2$ の関係が成り立つ。
周期が６秒の振り子を，周期を0.2秒長くするには，振り子の長さをどのように変えればよいか。

□(4)　右の図のように，Ａさんは P 地点から，Ｂさんは P 地点より 12 m 先から，同時にスタートしてそれぞれ斜面を下る。Ａさんは自転車で x 秒間に $\frac{1}{2}x^2$ m 進み，Ｂさんは毎秒１m の速さで歩く。
　Ａさんはスタートしてから何秒後にＢさんに追いつくか。



2 ［動点と図形の面積］ AB＝BC＝8 cm の直角二等辺三角形がある。点Ｐは点Ａを出発し，毎秒 4 cm の速さで辺上をＢを通り点Ｃまで進み停止する。また，点Ｑは点Ｐと同時に点Ｂを出発し，毎秒 2 cm の速さで辺BC上を点Ｃまで進み停止する。２点Ｐ，Ｑが出発して x 秒後の△APQの面積を y cm² として，次の問いに答えなさい。



□(1)　$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，y を x の式で表せ。

□(2)　$2 \leqq x \leqq 4$ のとき，y を x の式で表せ。

3 ［動点と図形の面積］ 図１のような台形ABCDがあり，点Ｐは辺BC上を点Ｂから点Ｃまで動く点である。また，線分BPをＰの方向に延ばした直線上にBP＝PQとなる点Ｑをとり，正方形PQRSを直線BCについて台形と同じ側につくる。BP＝$x$cm のとき，台形ABCDと正方形PQRSが重なっている部分の面積を y cm² として，次の問いに答えなさい。

図１

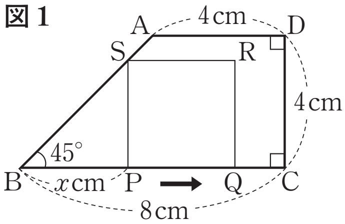
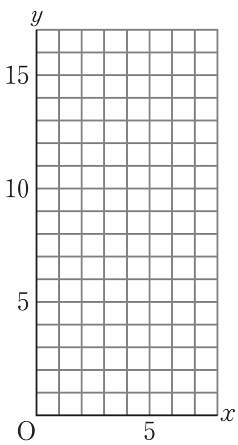


図２



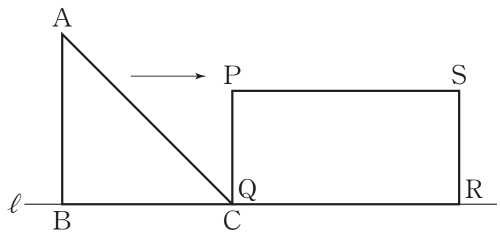
(1)　次のそれぞれの場合について，y を x の式で表せ。また，x と y の関係を表すグラフを**図２**にかけ。

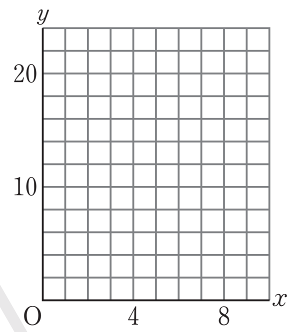
▣(ア)　$0 \leqq x \leqq 4$ のとき　　　▣(イ)　$4 \leqq x \leqq 8$ のとき

▣(2)　台形ABCDと正方形PQRSが重なっている部分の面積が，台形ABCDの面積の $\frac{1}{2}$ となるのは，線分BPの長さが何cmと何cmのときか。

Sample

4 **［重なる図形の面積］**　右の図のように，AB＝BC＝6 cm，∠ABC＝90° の直角二等辺三角形ABCと，PQ＝4 cm，QR＝8 cm の長方形PQRSがある。辺BC，辺QRは直線 ℓ 上にあり，点Cと点Qが重なっている。この状態から直角二等辺三角形ABCが直線 ℓ に沿って矢印の方向に毎秒1 cm の速さで，点Cが点Rと重なるまで動く。直角二等辺三角形ABCが動き始めてから x 秒後の，直角二等辺三角形ABCと長方形PQRSの重なっている部分の面積を y cm² とする。次の問いに答えなさい。





□(1)　$0 \leqq x \leqq 4$ のとき，y を x の式で表せ。

□(2)　x と y の関係を表すグラフを右の図にかけ。

□(3)　直角二等辺三角形ABCと長方形PQRSの重なっている部分の面積が 12 cm² になるのは，直角二等辺三角形ABCが動き始めてから何秒後かを求めよ。

5 **［重なる図形の面積］**　AB＝AC＝12，DE＝DF＝12 である2つの直角二等辺三角形ABCとDEFがあり，辺AB，DFが図のように直線上にのっている。頂点B，Fがともに原点Oにあるときを出発点(**図1**)として，△ABCは正の方向に毎秒1，△DEFは負の方向に毎秒2の速度で進む(**図2**)。出発して t 秒後に△ABCと△DEFが重なる部分の面積を S とするとき，次の問いに答えなさい。

図1

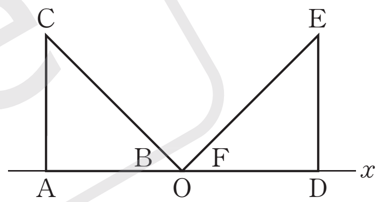
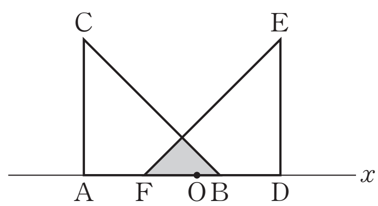


図2



(1)　t が次の各範囲にあるとき，S を t の式で表せ。

□①　$0 \leqq t \leqq 4$

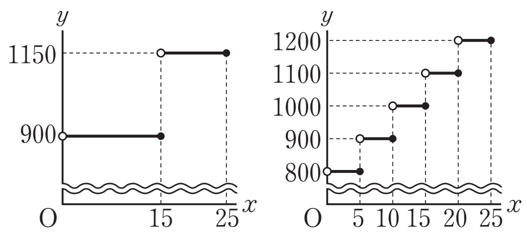
□②　$4 < t \leqq 8$

□(2)　$S=45$ となるのは何秒後か。すべて求めよ。

Sample

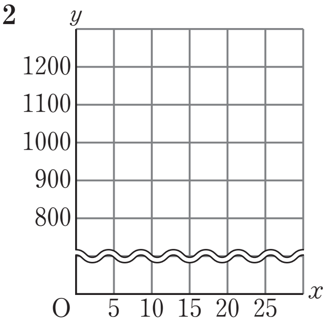
6 **［いろいろな事象と関数］**　A社，B社2つの運送会社のどちらかを利用して，ある地域へ品物を送りたい。**図1**は，重さが25kg以下の品物をその地域へ送るとき，A社を利用する場合とB社を利用する場合について，品物1個の重さと送料の関係を表したものである。次の問いに答えなさい。

図1　A社を利用する場合　　B社を利用する場合



□(1)　品物1個を送るとき，送料が高くならないように，その重さによってA社とB社のどちらかを選んで利用することにした。その場合，x kgの品物1個を送るときの送料を y 円として，x と y の関係を表すグラフを**図2**にかけ。

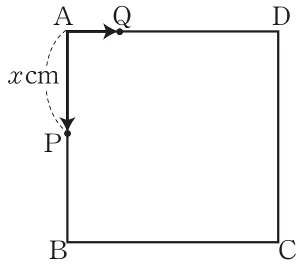
図2



□(2)　12kgの品物と18kgの品物を別々に送るとき，送料の合計をもっとも安くしたい。その場合，送料の合計はいくらになるかを求めよ。

演習問題 B

1　1辺の長さが4 cmの正方形ABCDがある。右の図のように，点P，Qは頂点Aを同時に出発し，正方形ABCDの辺上を出会うまで動くものとする。ただし，点Pの速さは点Qの速さの2倍である。点Pが動いた距離を x cm，△APQの面積を y cm^2 とする。次の問いに答えなさい。



回(1)　点Pが辺AB上，BC上，CD上にある場合に分け，それぞれ，x の変域を示し，y を x の式で表せ。

□(2)　y の最大値を求めよ。

2　**図1**のように，長方形と台形の2つの図形があり，1辺4 cmの正方形ABCDが，辺BCが x 軸と重なるようにおかれている。いま，**図2**のように，この正方形が x 軸にそって，矢印の方向に毎秒1 cmの速さで動いていく。頂点Cが原点Oを通過してから t 秒後における正方形と2つの図形との重なった部分の面積を S cm^2 とするとき，あとの問いに答えなさい。ただし，座標の1目もりの単位はcmとする。

図1

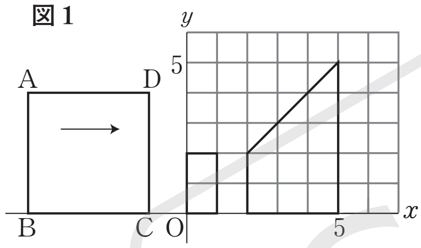


図2

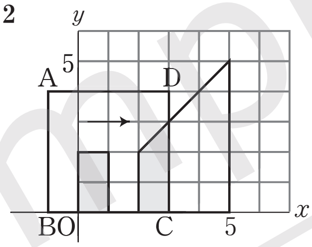
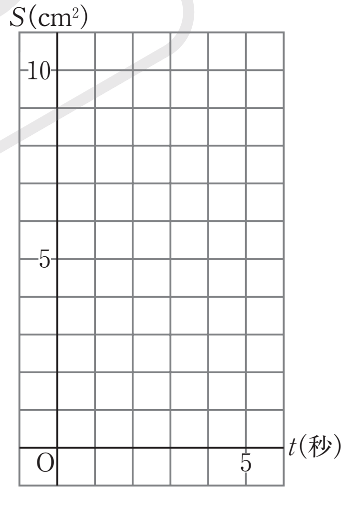


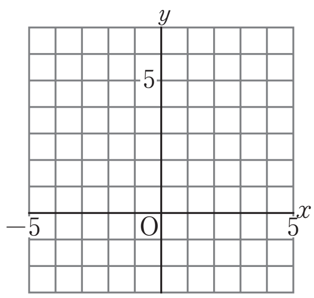
図3



回(1)　$0 \leqq t \leqq 1$，$1 \leqq t \leqq 2$，$2 \leqq t \leqq 4$，$4 \leqq t \leqq 5$ に分け，各場合について，S を表す式をつくれ。また，t と S の関係を表すグラフを**図3**にかけ。

回(2)　S の値が正方形の面積の $\frac{1}{5}$ になるとき，t の値をすべて求めよ。

3　数 x に対して，x をこえない最大の整数を $[x]$ と表す。たとえば，$[3.5]=3$，$[-2]=-2$ である。このとき，次の問いに答えなさい。



□(1)　$[2.3]$，$\left[-\frac{5}{3}\right]$，$[0]$ をそれぞれ求めよ。

□(2)　$[x]=2$ となる x の値の範囲を求めよ。

回(3)　関数 $y=[x]$　$(-2 \leqq x \leqq 3)$ のグラフを右の図にかけ。

Sample