高校新演習　数学Ⅲ

目次

第1講 ≫≫ 複素数平面(1)

基本事項

1 複素数平面

複素数 $\alpha=a+bi$ を座標平面上の点$(a,\ b)$で表すとき，この平面を複素数平面，または複素平面という。

複素数平面においては，x 軸を実軸，y 軸を虚軸という。

複素数平面上で複素数 α を表す点Aを $\mathrm{A}(\alpha)$ と書く。または，単に点 α と呼ぶこともある。

2 複素数の実数倍，加法，減法

α，β を複素数，k を実数とし，α を表す点をA，β を表す点をBとするとき

実数倍：$\beta=k\alpha \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

3点0，α，β が一直線上にあるための条件は，$\beta=k\alpha$ （k は実数）

和：$\mathrm{C}(\alpha+\beta)$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　差：$\mathrm{D}(\alpha-\beta)$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

3 共役な複素数

複素数 $\alpha=a+bi$ に対し，$\overline{\alpha}=a-bi$ を α に共役な複素数，または α の共役複素数という。

α と $\overline{\alpha}$ について，次のことが成り立つ。

$\alpha+\overline{\alpha}=2a$　　　$\alpha-\overline{\alpha}=2bi$

$\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2$　　　$\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$

α が実数 $\Longleftrightarrow \alpha=\overline{\alpha}$　　　α が純虚数 $\Longleftrightarrow \alpha=-\overline{\alpha}$，$\alpha\neq 0$

複素数 α，β について，次のことが成り立つ。

$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　　　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$　　　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

$\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$ （n は自然数）

また，複素数平面において

点 $\overline{\alpha}$ は点 α と実軸に関して対称

点 $-\overline{\alpha}$ は点 α と虚軸に関して対称

点 $-\alpha$ は点 α と原点に関して対称

4 絶対値と2点間の距離

複素数 $\alpha=a+bi$ に対し，$\sqrt{a^2+b^2}$ を α の絶対値といい，$|\alpha|$ と表す。

$|\alpha|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

複素数の絶対値について，次のことが成り立つ。

$|\alpha|\geqq 0$　　　$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$　　　$|\alpha|=|-\alpha|=|\overline{\alpha}|$

複素数平面において，原点Oと点 α の距離は $|\alpha|$，2点 α，β 間の距離は $|\beta-\alpha|$

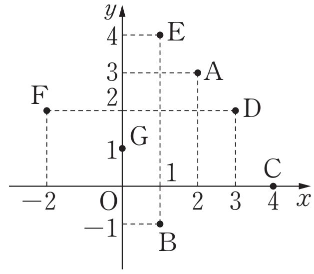
例題 1

$\alpha=2+3i$，$\beta=1-i$，$\gamma=4$ のとき，次の点を複素数平面上に記せ。

(1) $\mathrm{A}(\alpha)$　　(2) $\mathrm{B}(\beta)$　　(3) $\mathrm{C}(\gamma)$　　(4) $\mathrm{D}(\alpha+\beta)$

(5) $\mathrm{E}(\alpha-\beta)$　　(6) $\mathrm{F}(-2\beta)$　　(7) $\mathrm{G}(\alpha+2\beta-\gamma)$

解答　右の図のようになる。



(4)　$\alpha+\beta=3+2i$

(5)　$\alpha-\beta=1+4i$

(6)　$-2\beta=-2+2i$

(7)　$\alpha+2\beta-\gamma=i$

正解へのアクセス

複素数 $\alpha=a+bi$ と点$(a,\ b)$が対応する。ベクトルのイメージも利用しよう。

類題 1

$\alpha=3-6i$，$\beta=-2+5i$，$\gamma=2i$ のとき，次の点を複素数平面上に記せ。

(1)　A(α)　　(2)　B(β)　　(3)　C(γ)　　(4)　D$(\alpha+\beta)$

(5)　E$(\alpha-\beta)$　　(6)　F$\left(\dfrac{1}{3}\alpha\right)$　　(7)　G$(\alpha+2\beta-3\gamma)$

例題 2

$\alpha=2-5i$，$\beta=-4+pi$ とする。3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，実数 p の値を求めよ。

解答　3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，$\beta=k\alpha$（k は実数）とできるから

$-4+pi=k(2-5i)$

$-4+pi=2k-5ki$

p，k は実数であるから

$-4=2k$，$p=-5k$

これを解いて　$k=-2$，$p=10$

正解へのアクセス

3 点 0，α，β が一直線上にあるための条件は $\beta=k\alpha$（k は実数）である。

類題 2

$\alpha=3-3i$，$\beta=p+4i$ とする。3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，実数 p の値を求めよ。

例題 3

$\alpha=3-2i$，$\beta=1+2i$ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+(\overline{\alpha})^2$　　(2)　$\alpha^2-(\overline{\alpha})^2$　　(3)　$\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\overline{\beta}}$

(4)　$|\alpha+2\beta|$　　(5)　$|\alpha\overline{\beta}|$

解答　(1)　$\alpha+\overline{\alpha}=(3-2i)+(3+2i)=6$，$\alpha\overline{\alpha}=(3-2i)(3+2i)=9+4=13$ より

$\alpha^2+(\overline{\alpha})^2=(\alpha+\overline{\alpha})^2-2\alpha\overline{\alpha}$

$=6^2-2\times13=10$

(2)　$\alpha-\overline{\alpha}=(3-2i)-(3+2i)=-4i$ より

$\alpha^2-(\overline{\alpha})^2=(\alpha+\overline{\alpha})(\alpha-\overline{\alpha})$

$=6\times(-4i)=-24i$

(3) $\beta-\overline{\beta}=(1+2i)-(1-2i)=4i$, $\beta\overline{\beta}=(1+2i)(1-2i)=1+4=5$ より

$$\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\overline{\beta}}=-\frac{\beta-\overline{\beta}}{\beta\overline{\beta}}=-\frac{4}{5}i$$

(4) $\alpha+2\beta=(3-2i)+2(1+2i)=5+2i$ より

$$|\alpha+2\beta|=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$$

(5) $\alpha\overline{\beta}=(3-2i)(1-2i)=-1-8i$ より

$$|\alpha\overline{\beta}|=\sqrt{(-1)^2+(-8)^2}=\sqrt{65}$$

(別解) $|\alpha\overline{\beta}|^2=(\alpha\overline{\beta})\overline{(\alpha\overline{\beta})}=\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}=|\alpha|^2|\beta|^2$

これと，$|\alpha\overline{\beta}|\geqq 0$，$|\alpha|\geqq 0$，$|\beta|\geqq 0$ より

$$\begin{aligned}|\alpha\overline{\beta}|&=|\alpha||\beta|\\&=\sqrt{3^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2}\\&=\sqrt{65}\end{aligned}$$

正解へのアクセス

共役複素数の性質を用いて，効率良く計算しよう。

類題 3

$\alpha=3+4i$，$\beta=-2-3i$ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+(\overline{\alpha})^2$　(2) $\alpha^2-(\overline{\alpha})^2$　(3) $\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\overline{\beta}}$

(4) $|3\alpha+2\beta|$　(5) $|\alpha\overline{\beta}|$

例題 4

$\alpha=3+i$，$\beta=3+5i$，$\gamma=3-2\sqrt{3}+3i$ とするとき，3点A(α)，B(β)，C(γ)を頂点とする三角形ABCはどのような三角形か。

解答

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=|\beta-\alpha|=|4i|=4\\\mathrm{BC}&=|\gamma-\beta|=|-2\sqrt{3}-2i|\\&=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4\\\mathrm{CA}&=|\alpha-\gamma|=|2\sqrt{3}-2i|\\&=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4\end{aligned}$$

よって，AB=BC=CA が成り立つから，三角形ABCは正三角形である。

正解へのアクセス

複素数平面において，2点 α，β 間の距離は $|\beta-\alpha|$ で求められる。

類題 4

$\alpha=-1+2i$，$\beta=3-i$，$\gamma=2+6i$ とするとき，3点A(α)，B(β)，C(γ)を頂点とする三角形ABCはどのような三角形か。

演　習　問　題

1　$\alpha=1+i$ とするとき，点 α，α^2，α^3，α^4 を複素数平面上に記せ。 ↝例題❶

2　$\alpha=2+3i$ とするとき，次の点を表す複素数を求めよ。 ↝例題❶

(1)　虚軸に関して点 α と対称な点

(2)　点 α を実軸の方向に 3，虚軸の方向に -6 だけ平行移動した点

(3)　原点をO，点 α をAとしたとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ で定まる点B

3　$\alpha=a-3i$，$\beta=2+bi$，$\gamma=8b+12i$ とする。4 点 0，α，β，γ が一直線上にあるとき，実数 a，b の値を求めよ。 ↝例題❷

4　$\alpha=3-4i$，$\beta=1+i$ とするとき，次の式の値を求めよ。 ↝例題❸

(1)　$\alpha^3+(\overline{\alpha})^3$

(2)　$\dfrac{\overline{\beta}}{\alpha+1}+\dfrac{\beta}{\overline{\alpha}+1}$

(3)　$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right|$

5　z が虚数，$\dfrac{(z+2)^2}{z}$ が実数であるとき，$|z|$ の値を求めよ。

6　$|z|=1$，$|z-i|=1$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$z-\overline{z}$，$z^2+\dfrac{1}{z^2}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　a を実数とするとき，$|z-ai|$ の最小値を求めよ。

7　3 点 A$(7-3i)$，B$(-1-7i)$，C$(-5+i)$ から等距離にある点を表す複素数を求めよ。 ↝例題❹

8　A$(3+5i)$，B$(4+2i)$ とする。点Pが虚軸上，点Qが実軸上をそれぞれ動くとき，線分の長さの和 AP+PQ+QB の最小値を求めよ。 ↝例題❹

入試問題演習

STEP 1

1 $|z|=\sqrt{5}$，$z+\overline{z}=2$ であるような複素数 z を求めよ。 〈小樽商科大〉

2 複素数 $z=-1+i$ に対して，集合

$S=\{a_0+a_1z+a_2z^2 \mid a_0,\ a_1,\ a_2$ は 0 または $1\}$

を考える。S の中で絶対値が最大の複素数を求めよ。 〈横浜市立大〉

3 a，b を実数，３次方程式 $x^3+ax^2+bx+1=0$ が虚数解 α をもつとする。このとき，次の問いに答えよ。

〈防衛医大・改〉

(1) α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解になることを示せ。また，３つめの解 β，および係数 a，b を α，$\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(2) α の実部が 3，α の絶対値が 4 であるとき，β，a，b の値を求めよ。

4 複素数 $z=x+yi$ (x，y は実数) を，$z+\dfrac{1}{z}$ が実数となるように動かすとき，x^2y+4y^3 の最大値を求めよ。

〈東京医科歯科大〉

STEP 2

1 複素数平面上を動く点Pは，原点Oを出発して，硬貨を１回投げるごとに，次の規則に従って移動する。

“表が出たら，１だけ移動し，裏が出たら $1+i$ だけ移動する。”

硬貨を n 回投げた後Pが移る点に対応する複素数を z_n とするとき，次の問いに答えよ。 〈杏林大〉

(1) 硬貨を３回投げた後，$z_3=3$ となる確率を求めよ。

(2) 硬貨を５回投げた後，$z_5=5+2i$ となる確率を求めよ。

(3) 硬貨を７回投げた後，$|z_7-7|\leqq 5$ となる確率を求めよ。

2 複素数 z に関する等式 $|z+i|+|z-i|=2\sqrt{2}$ ……① について，次の問いに答えよ。 〈静岡大〉

(1) z が①を満たすとき，$\overline{z}$ も①を満たすことを示せ。

(2) $z=x+yi$ (x，y は実数) が①を満たすとき，$w=\sqrt{2}\,x+yi$ は $|w|=\sqrt{2}$ を満たすことを示せ。