試験開始の指示があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。　γ

数　学　②　〔数学Ⅱ・数学B・数学C〕

（100点　70分）

Ⅰ　注　意　事　項

1　解答用紙に，正しく記入・マークされていない場合は，採点できないことがあります。

2　この問題冊子は，29ページあります。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を高く挙げて監督者に知らせなさい。

4　**選択問題については，いずれか3問を選択**し，その問題番号の解答欄に解答しなさい。

5　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

Ⅱ　解答上の注意

解答上の注意は，裏表紙に記載してあります。問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

数学Ⅱ・数学B・数学C

問　題	選　択　方　法
第1問	必　　答
第2問	必　　答
第3問	必　　答
第4問	いずれか3問を選択し，解答しなさい。
第5問	
第6問	
第7問	

第7問 （選択問題） （配点　16）

〔1〕 xy 平面上に楕円 $C : x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ がある。

(1) C の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた2本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよう。

点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通る傾き m の直線を ℓ とする。ℓ の方程式は

$$y = m(x - a) + b$$

であるから，ℓ と C の式から y を消去して得られる x の方程式

$$(m^2 + 4)x^2 + 2m(b - ma)x + (b - ma)^2 - 4 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

は2次方程式である。

①の判別式を D とするとき，ℓ と C が接するための必要十分条件は，$D \boxed{\text{ア}}\ 0$ である。この条件から得られる，a，b，m の関係を表す式を m について整理すると

$$\left(a^2 - \boxed{\text{イ}}^{\,2}\right)m^2 - \boxed{\text{ウ}}\,abm + b^2 - \boxed{\text{エ}} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots②$$

となる。

(i) $a \neq \pm \boxed{\text{イ}}$ のとき

②は m の2次方程式であり，$\mathrm{P}(a,\ b)$ は楕円 C の外部の点であるから，②は異なる2つの実数解をもつ。これらを m_1，m_2 とすると，$\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた2本の接線が直交する条件は，$m_1 m_2 = \boxed{\text{オカ}}$ である。したがって，2次方程式の解と係数の関係から，a，b の条件が得られる。

(ii) $a = \pm \boxed{\text{イ}}$ のとき

4点 $\left(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$，$\left(\boxed{\text{イ}},\ -\boxed{\text{キ}}\right)$，$\left(-\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$，$\left(-\boxed{\text{イ}},\ -\boxed{\text{キ}}\right)$ から C に引いた2本の接線は，一方が x 軸に平行で，他方が y 軸に平行な直線であり，直交する。

このとき，これらの4点は(i)の条件を満たしている。

(i)または(ii)より，点 P の軌跡は $\boxed{\text{ク}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B・数学C第7問は次ページに続く。）

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $<$	① $\leqq$	② $=$	③ $\geqq$	④ $>$

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ 原点Oを中心とする半径2の円

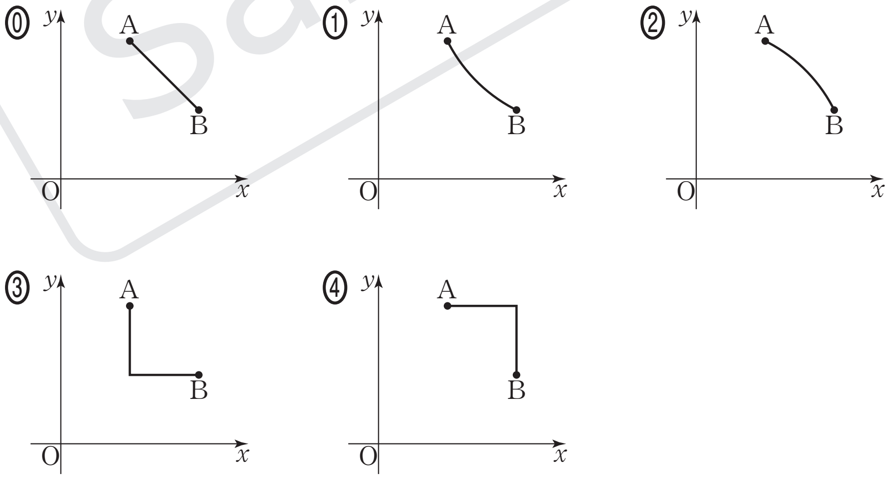
① 原点Oを中心とする半径$\sqrt{5}$の円

② 原点Oを中心とする，長軸の長さが$4\sqrt{2}$，短軸の長さが$2\sqrt{2}$の楕円

③ 原点Oを中心とする，長軸の長さが4，短軸の長さが$\sqrt{5}$の楕円

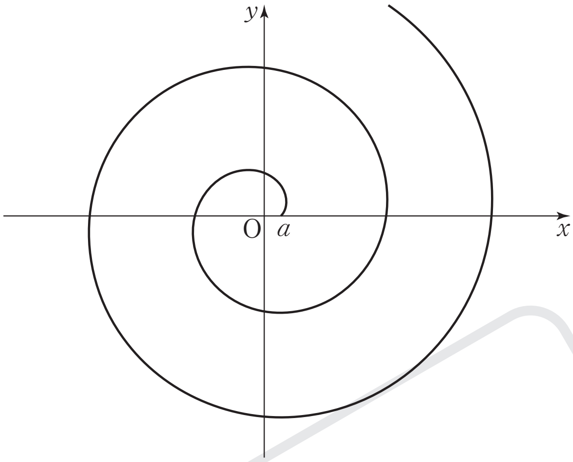
(2) xy平面上において，中心が第1象限にある，楕円Cと合同な楕円C'が，x軸，y軸の両方に接しつつ可能なすべての位置にわたって動くとき，楕円C'の中心の描く図形は $\boxed{\text{ケ}}$ である。ただし，2点A，Bの座標は，それぞれA(1，2)，B(2，1)である。

$\boxed{\text{ケ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。



(数学Ⅱ・数学B・数学C第7問は次ページに続く。)

〔2〕 複素数平面上で，実軸上の点 a $(a>0)$ から始まり，偏角 θ が増加すると原点からの距離が増加する螺線を考える。



(1) 螺線上の任意の点 w は，$w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(\theta \geqq 0)$ の形で表される。

点 w と原点の距離が，偏角 θ が増加するにつれ 1 ラジアン当たり b $(b>0)$ だけ増加するとき

$$r=\boxed{\text{コ}}$$

と表されるので，螺線の式は

$$w=\left(\boxed{\text{コ}}\right)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

である。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $a\theta+b$	① $a+b\theta$	② $ab\theta$	③ $\dfrac{a}{b}\theta$

(2) (1)において，$a=1$，$b=1$ とする。原点を O，螺線上の $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ に対応する点を P，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ に対応する点を Q とするとき，△OPQ の面積 S を求めよう。

（数学Ⅱ・数学B・数学C第7問は次ページに続く。）

(i) 点 P，Q を表す複素数はそれぞれ

$$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{\boxed{\text{サ}}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{\boxed{\text{サ}}}\right)i\right),$$

$$\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi\right)i\right)$$

である。

一般に，原点を O とする座標平面上の三角形 OAB について，2 点 A，B の座標がそれぞれ $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$であるとき，△OAB の面積は $\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$で与えられる。

(ii) 原点 O，2 点 P，Q について

$$\mathrm{OP}=1+\frac{\pi}{\boxed{\text{サ}}},\quad \mathrm{OQ}=1+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi$$

である。

一般に，原点を O とする座標平面上の三角形 OAB について，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ $(0<\theta<\pi)$であるとき，△OAB の面積は $\boxed{\text{セ}}$ で与えられる。

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta$	① $\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta$	② $\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta$
③ $\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta$	④ $\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\tan\theta$	⑤ $\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\tan\theta$

(iii) (i)または(ii)の方法により

$$S=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}\left(1+\frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}\pi+\frac{1}{\boxed{\text{ニ}}}\pi^2\right)$$

である。ただし，$\boxed{\text{ソ}}>\boxed{\text{タ}}$ とする。

Ⅱ　解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，符号(－)又は数字(０～９)が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$ に －83 と答えたいとき

ア	**⊖**	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	**⑧**	⑨
ウ	⊖	⓪	①	②	**③**	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$ のように答えてはいけません。

4　小数の形で解答する場合，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えなさい。また，必要に応じて，指定された桁まで⓪にマークしなさい。

例えば，$\boxed{\text{キ}}$. $\boxed{\text{クケ}}$ に 2.5 と答えたいときは，2.50 として答えなさい。

5　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$4\sqrt{2}$ ，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ ，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。

6　問題の文中の二重四角で表記された $\boxed{\text{コ}}$ などには，選択肢から一つを選んで，答えなさい。

7　同一の問題文中に $\boxed{\text{サシ}}$ ，$\boxed{\text{ス}}$ などが２度以上現れる場合，原則として，２度目以降は，$\boxed{\text{サシ}}$ ，$\boxed{\text{ス}}$ のように細字で表記します。