第4講　場合の数と確率

入試標準演習

1　次の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{オ}}$にあてはまる数を答えよ。

正十角形ABCDEFGHIJにおいて，この正十角形の10個の頂点から3点を結んで三角形を作る。このとき，次のことがいえる。

(1)　三角形は全部で$\boxed{\text{ア}}$個ある。

(2)　二等辺三角形は全部で$\boxed{\text{イ}}$個ある。

(3)　直角三角形は全部で$\boxed{\text{ウ}}$個あるか。

(4)　正十角形と一辺だけを共有する三角形は全部で$\boxed{\text{エ}}$個あるか。

(5)　正十角形と辺を共有しない三角形は全部で$\boxed{\text{オ}}$個あるか。

2　TOHOKUという単語に関して，次の問いに答えよ。

(1)　6文字をすべて使ってできる順列は全部で何通りあるか。

(2)　(1)の文字列を英和辞典の単語の順序に従って並べたときに18番目の文字列は何か。

(3)　(1)の文字列を英和辞典の単語の順序に従って並べたときにTOHOKUは何番目に現れるか。

3　次の$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$にあてはまる数を答えよ。

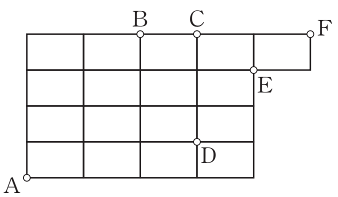
A，B，Cの3カ国から4人ずつ12人が集まった。

(1)　A，Bの2カ国から1人ずつ選んでできる2人の組を4組作る方法は$\boxed{\text{ア}}$通りある。

(2)　A，B，Cの3カ国から1人ずつ選んでできる3人の組を4組作る方法は$\boxed{\text{イ}}$通りある。

4　次の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{オ}}$にあてはまる数を答えよ。

下の図のような道のある町がある。

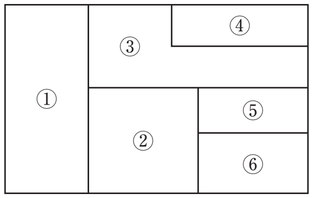


(1)　地点Aから地点Cまでの最短の道順は$\boxed{\text{ア}}$通りであり，このうち地点Bを通らない最短の道順は$\boxed{\text{イ}}$通りである。

(2)　地点Aから地点Eまでの最短の道順のうち，地点Dを通るものは$\boxed{\text{ウ}}$通りである。

(3)　地点Aから地点Fまでの最短の道順は$\boxed{\text{エ}}$通りである。このうち，地点B，C，D，Eの2つ以上を通らない最短の道順は$\boxed{\text{オ}}$通りである。

5 次の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{エ}}$にあてはまる数を答えよ。



図の①から⑥の6つの部分を色鉛筆を使って塗り分ける方法について考える。ただし，1つの部分は1つの色で塗り，隣り合う部分は異なる色で塗るものとする。

(1) 6色で塗り分ける方法は，$\boxed{\text{ア}}$通りである。

(2) 5色で塗り分ける方法は，$\boxed{\text{イ}}$通りである。

(3) 4色で塗り分ける方法は，$\boxed{\text{ウ}}$通りである。

(4) 3色で塗り分ける方法は，$\boxed{\text{エ}}$通りである。

6 次の$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$にあてはまる数を答えよ。

1，1，1，2，3，4の6個の数字を並べて6桁の自然数nをつくるとき，nが奇数である確率は$\boxed{\text{ア}}$であり，nが320000以上である確率は$\boxed{\text{イ}}$である。

7 次の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{エ}}$にあてはまる数を答えよ。

1個のさいころを3回投げる。1回目に出た目をa，2回目に出た目をb，3回目に出た目をcとする。

(1) a，b，cがすべて異なる確率は$\boxed{\text{ア}}$である。

(2) a，b，cの積abcが偶数である確率は$\boxed{\text{イ}}$であり，積abcが4で割り切れる確率は$\boxed{\text{ウ}}$である。

(3) a，b，cの和$a+b+c$が5で割り切れる確率は$\boxed{\text{エ}}$である。

8 次の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{カ}}$にあてはまる数を答えよ。

3つのさいころを同時に投げる。

(1) 出る目がすべて同じになる確率は$\boxed{\text{ア}}$，すべて異なる確率は$\boxed{\text{イ}}$である。出る目のうちちょうど2つが一致し他は異なる確率は$\boxed{\text{ウ}}$である。

(2) 出る目の最小値が3以上となる確率は$\boxed{\text{エ}}$，最小値が3となる確率は$\boxed{\text{オ}}$，最小値が3で最大値が5となる確率は$\boxed{\text{カ}}$である。

9 A，Bの2人が試合を行う。1回の試合でAが勝つ確率は$\frac{2}{3}$，Bが勝つ確率は$\frac{1}{3}$である。引き分けはないものとする。次の問いに答えよ。

(1) 先に3試合勝った人を優勝とするとき，Aが優勝する確率を求めよ。

(2) 一方が他方よりも2試合多く勝ったところで，多く勝った方の人を優勝とする。4試合目までにAが優勝する確率を求めよ。

10 AとBの2つの袋がある。Aには赤球が2個と白球が2個入っており，Bには赤球が1個と白球が3個入っている。今いずれかの袋から1個，球を取り出したところ，赤球であった。それが袋Aから取り出された確率と袋Bから取り出された確率を，それぞれ求めよ。ただし，いずれの袋を選ぶのかは同様に確からしいとする。

入試例題 1 大小関係が決まった整数の順列

整数の組$(x_1,\ x_2,\ x_3)$について，次の問いに答えよ。

⑴　$1 \leqq x_1 < x_2 < x_3 \leqq 6$ となるような組み合わせは何通りか。

⑵　$1 \leqq x_1 \leqq x_2 < x_3 \leqq 6$ となるような組み合わせは何通りか。

アプローチ

大小関係が決まった整数の順列を考えるときは，とりうるすべての整数の集合から必要な個数を選び，小さい順に並べると考えて，その組み合わせを求めることを考える。

⑵では，$x_1 = x_2$ の場合が含まれるため，「a，b が整数のとき，$a \leqq b \Longleftrightarrow a < b+1$」を利用して，条件に含まれる等号をなくすことで，⑴の考えに帰着させて，1から7までの整数の中から3つの整数を選ぶ組み合わせを求める。このとき，「$a \leqq b$ を満たす整数$(a,\ b)$の組み合わせの数」と「$a < b+1$ を満たす整数$(a,\ b+1)$の組み合わせの数」は一致することに注意する。

また，1から5までの整数の中から重複を許して3つの整数を選ぶ組み合わせを求める，もしくは，「$x_1 \leqq x_2 < x_3$」を，「$x_1 < x_2 < x_3$」と「$x_1 = x_2 < x_3$」の場合に分けて考えて求めることもできる。

解答

⑴　1から6までの6個の数字から異なる3個を選び，小さい方から順に x_1，x_2，x_3 とすればよいから，求める場合の数は

$${}_6C_3 = 20(通り)$$

⑵　$1 \leqq x_1 \leqq x_2 < x_3 \leqq 6$ は，$1 \leqq x_1 < x_2 + 1 < x_3 + 1 \leqq 7$ とできる。

よって，⑴と同様に1から7までの7個の数字から異なる3個を選び，小さい方から順にx_1，x_2+1，x_3+1 とすればよいから，求める場合の数は

$${}_7C_3 = 35(通り)$$

(別解1)

1から5までの5個の数字から重複を許して3個を選び，小さい方から順に x_1，x_2，x_3-1 とすれば，$1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 - 1 \leqq 5$ となる。このとき，$1 \leqq x_1 \leqq x_2 < x_3 \leqq 6$ だから，このような x_1，x_2，x_3 の選び方が何通りあるかを求めればよいので，求める場合の数は

$${}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35(通り)$$

(別解2)

$x_1 = x_2 < x_3$ となる場合を考えると，1から6までの6個の数字から異なる2個を選び，小さい方から順に $x_1(=x_2)$，x_3 とすればよいから

$${}_6C_2 = 15(通り)$$

これと⑴より，$1 \leqq x_1 \leqq x_2 < x_3 \leqq 6$ となる場合の数は

$$20 + 15 = 35(通り)$$

類題1　0から9までの番号をつけた10枚のカードがある。このとき，次の問いに答えよ。

⑴　同時に2枚のカードを取るとき，その番号の積が30以上となる確率を求めよ。

⑵　カードを1枚取り，番号を見てもとに戻さないという試行を3回繰り返す。1回目に取り出したカードの番号を a，2回目に取り出したカードの番号を b，3回目に取り出したカードの番号を c とするとき，$a < b < c$ となる確率を求めよ。

⑶　カードを1枚取り，番号を見てもとに戻すという試行を3回繰り返す。1回目に取り出したカードの番号を a，2回目に取り出したカードの番号を b，3回目に取り出したカードの番号を c とするとき，$a \leqq b \leqq c$ となる確率を求めよ。

入試例題 2 確率の最大値

n を9以上の自然数とする。袋の中に n 個の球が入っている。このうち6個は赤球で残りは白球である。この袋から6個の球を同時に取り出すとき，3個が赤球である確率を P_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P_9，P_{10}，P_{15} を求めよ。

(2) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ を n の式で表せ。

(3) P_n が最大となる n を求めよ。

アプローチ

確率 P_n の最大･最小は，隣り合う確率 P_n と P_{n+1} の大小関係を調べることにより求められる。方法としては，比 $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ と1との大小を調べる，または，差 $P_{n+1}-P_n$ の符号を調べる，の2通りある。

(2)では，組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いることで，確率 P_n をその式で表すことができるから，P_n の n に $n+1$ を代入して P_{n+1} を得る。このとき，確率 P_n，P_{n+1} は文字を含む階乗の式で表されるから，確率の比を用いることで，階乗で表された式の一部を約分することができ，計算しやすくなる。

(3)確率 P_n と P_{n+1} の大小関係を調べる際は，答えに適する n が複数存在する可能性があるため，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=1$ となる n が存在するかどうか確認する。

解答

(1) $P_9=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_6}=\dfrac{5}{21}$　　$P_{10}=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_6}=\dfrac{8}{21}$

$P_{15}=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_9\mathrm{C}_3}{{}_{15}\mathrm{C}_6}=\dfrac{48}{143}$

(2) $n\geqq 9$ のとき

$P_n=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-6}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_6}$，$P_{n+1}=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6}$

であるから

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6}\times\frac{{}_n\mathrm{C}_6}{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-6}\mathrm{C}_3}$$
$$=\frac{(n-5)!}{3!(n-8)!}\times\frac{6!(n-5)!}{(n+1)!}\times\frac{n!}{6!(n-6)!}\times\frac{3!(n-9)!}{(n-6)!}$$
$$=\frac{n-5}{n-8}\times\frac{n-5}{(n+1)}=\frac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)}$$

(3) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1$ のとき

$$\frac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)}>1$$

$n\geqq 9$ のとき $(n+1)(n-8)>0$ であるから両辺に正の数 $(n+1)(n-8)$ をかけると

$(n-5)^2>(n+1)(n-8)$　　$n<11$

したがって

$9\leqq n\leqq 10$ のとき，$P_n<P_{n+1}$

$n=11$ のとき，　$P_n=P_{n+1}$

$12\leqq n$ のとき，　$P_n>P_{n+1}$

すなわち

$P_9<P_{10}<P_{11}=P_{12}>P_{13}>\cdots\cdots$

よって，P_n が最大となる n の値は

$n=11$，12

類題 2　青球6個と赤球 n 個 $(n\geqq 2)$ が入っている袋から，3個の球を同時に取り出すとき，青球が1個で赤球が2個である確率を P_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P_n を n の式で表せ。

(2) $P_n>P_{n+1}$ をみたす最小の n を求めよ。

(3) P_n を最大にする n の値を求めよ。

入試発展演習

STEP 1

1 一辺の長さが１の立方体がある。この立方体の８個の頂点から異なる３個を選び，これらを頂点とする三角形をつくる。次の問いに答えよ。

(1) 三角形は全部で何個できるか。

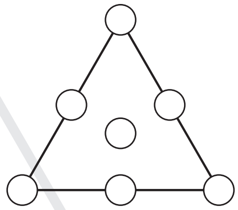
(2) 直角三角形は全部で何個できるか。

(3) 面積が $\frac{7}{10}$ 以上である三角形は全部で何個できるか。

(4) つくる三角形の面積の期待値を求めよ。

2 右の図は正三角形の３つの頂点，重心および辺上に同じ大きさの円を描いたものである。辺上の円は図では各辺の中点に描かれている。次の問いに答えよ。

重心のまわりに回転して同じ配列になる並べ方は１通りと数える。



(1) １から７の自然数が１つずつ書かれた球を，図の円のところに１つずつ並べる。１が頂点に置かれる並べ方は何通りか。また，並べ方は全部で何通りか。

以下，同じ色の球は区別しないものとする。

(2) 白球１個，赤球６個を図の円のところに１つずつ並べる並べ方は何通りか。
また，白球２個，赤球５個を図の円のところに１つずつ並べる並べ方は何通りか。

(3) 白球３個，赤球４個を図の円のところに１つずつ並べる並べ方は何通りか。

(4) ７個の白球または赤球を図の円のところに１つずつ並べる並べ方は何通りか。ただし，どちらかの色のみであってもよいものとする。

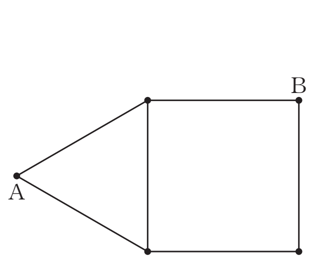
3 m を４以上の自然数とする。赤玉 m 個と青玉 m 個の計 $2m$ 個の玉を袋に入れる。袋から玉を１個ずつ続けて４個取り出す。最初の２個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を A とする。４個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を B とする。以下では事象 A が起こる確率を $P(A)$ などと表す。次の問いに答えよ。

(1) 確率 $P(A)$，$P(B)$ をそれぞれ m で表せ。

(2) 確率 $P(A \cap B)$ を m で表せ。

(3) 事象 A も B も起こらない確率を m で表せ。

4 右の図のような道路網がある。毎日，６つの区間のそれぞれは確率 $\frac{1}{2}$ で通行止めとなる。ある日にＡからＢまで行くことのできる確率を求めよ。



5 袋の中に１から５までの番号をつけた５個の玉が入っている。この袋から玉を１個取り出し，番号を調べてからもとに戻す試行を，４回続けて行う。n 回目 $(1 \leqq n \leqq 4)$ に取り出された玉の番号を r_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $r_1+r_2+r_3+r_4 \leqq 8$ となる確率を求めよ。

(2) $\frac{4}{r_1 r_2}+\frac{2}{r_3 r_4}=1$ となる確率を求めよ。

6 ある工場で作られた製品が大量に保管されている。その中の90%が良品，10%が不良品であるという。この製品の品質検査では，不良品を不合格とする確率が94.5%，良品を誤って不合格とする確率が10.5%である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 保管されている製品の中から1個を取り出して品質検査を1回行う。品質検査の結果が不合格である確率を求めよ。

(2) 保管されている製品の中から1個を取り出して品質検査を1回行う。品質検査の結果が不合格であるとき，その製品が不良品である条件付き確率を求めよ。

(3) 保管されている製品の中から1個を取り出して品質検査を2回行う。品質検査の結果が2回とも不合格であるとき，その製品が不良品である条件付き確率を求めよ。

7 xy平面上で2点A，Bの移動を考える。最初2点は，Aが原点$(0,\ 0)$，Bが点$(3,\ 3)$にあるとし，以降，大きなコイン1枚と小さなコイン1枚を同時に投げて，次の規則に従って2点を移動する操作を行う。

（規則） Aが点$(p,\ q)$，Bが点$(r,\ s)$にあるとき，

・Aは，大きなコインの表裏によって移動し，大きなコインが表ならば点$(p,\ q+1)$へ，裏ならば$(p+1,\ q)$へ移動する。

・Bは，小さなコインの表裏によって移動し，小さなコインが表ならば点$(r,\ s-1)$へ，裏ならば$(r-1,\ s)$へ移動する。

次の問いに答えよ。

(1) 操作を3回繰り返したあとに，AとBが同じ点にある確率を求めよ。

(2) 操作を6回繰り返してAが点$(3,\ 3)$，Bが点$(0,\ 0)$にあるとき，3回目の操作の終了時にA，Bが同じ点にあった確率を求めよ。

STEP 2

1 1，2，11，12の数字の1つが書かれたボールが各1個ずつ袋の中に入っている。この袋からボールを1個取り出してボールの数字を書きとめ，ボールを袋に戻す操作を3回行う。3つの数字を取り出した順に左から右に並べて1つの整数を作る。例えば1，2，2の書かれたボールが順に取り出された場合は3桁の整数122が，11，12，1の書かれたボールが順に取り出された場合は5桁の整数11121ができる。次の問いに答えよ。

(1) できた整数が4の倍数となる確率を求めよ。

(2) できた整数が3の倍数となる確率を求めよ。

(3) 何通りの整数を作ることができるか。

2 太郎は15個の球を，花子は21個の球を持っている。ここから始めて，次の手順による球のやり取りを，2人の間で繰り返す。

【1】 2個のさいころを同時に投げる。

【2】 ① 2個とも奇数の目が出たら，太郎が花子に1個の球を渡す。

② 2個とも偶数の目が出たら，太郎が花子に2個の球を渡す。

③ 奇数の目と偶数の目が1個ずつ出たら，花子が太郎に3個の球を渡す。

この手順【1】，【2】によるやり取りを，7回繰り返す。その結果，太郎と花子が持つ球の個数について，次の問いに答えよ。

(1) 太郎と花子が同数の球を持っている確率を求めよ。

(2) 持っている球の数が，太郎と花子の2人とも最初と変わらない確率を求めよ。

(3) 太郎が持っている球の数が，花子が持っている球の数の半分である確率を求めよ。