第7講　複素数平面，平面上の曲線

入試標準演習

1　虚数単位を i とする。次の問いに答えよ。

(1)　複素数 $-64i$ を極形式で表せ。

(2)　方程式 $z^3=-64i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。

2　等式 $(i-\sqrt{3})^m=(1+i)^n$ を満たす自然数 m，n のうち，m が最小となるときの m，n の値を求めよ。ただし，i は虚数単位である。

3　次の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ にあてはまる数を求めよ。

複素数平面上に異なる3点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$，$\mathrm{P}_3(z_3)$ がある。複素数 z_1，z_2，z_3 が次の3つの条件を満たすとする。

条件1：$z_1{}^2+z_2{}^2-z_1z_2=0$

条件2：$|z_1|=\sqrt{2}$

条件3：$z_3=z_1+z_2$

このとき，$|z_2|$ は $\boxed{\text{ア}}$ である。また，この3つの条件を満たす $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$，$\mathrm{P}_3(z_3)$ を頂点とする三角形の面積は $\boxed{\text{イ}}$ になる。

4　α を正の実数，β を複素数とする。複素数平面上の3点0，α，β を頂点とする三角形の面積が1で，α と β が $5\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2=0$ を満たすとき，α と β の値を求めよ。

5 i を虚数単位とする。複素数平面において，点 z が，2 点 0，i を結ぶ線分の垂直二等分線上を動くとき，$w=\dfrac{2z-1}{iz+1}$ を満たす点 w のえがく図形を求めよ。

6 a，b を正の実数とする。楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる楕円が y 軸と直線 $y=x$ に接するような a，b を求めよ。

7 Oを原点とする座標平面上に，次のような双曲線 C と直線 ℓ_k（k は実数の定数）が与えられているとき，次の問いに答えよ。

$C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=-1$ 　　$\ell_k:3x-4y+k=0$

(1) C と ℓ_k が接するような k の値を求めよ。

(2) C 上の点と直線 $\ell_0:3x-4y=0$ の距離の最小値を求めよ。

8 次の $\boxed{\text{ア}}$ にあてはまる式，$\boxed{\text{イ}}$ にあてはまる数を求めよ。

極座標が $(1,\ 0)$ である点をA，極座標が $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ である点をBとする。このとき，極Oを通り，線分ABに垂直な直線 ℓ の極方程式は $\boxed{\text{ア}}$ である。また，a を正の定数とし，極方程式 $r=a\cos\theta$ で表される曲線が直線ABと接するとき，a の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

入試例題 1 1のn乗根の性質の利用

$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位である。

(1) $z^n=1$ となる最小の正の整数 n を求めよ。

(2) $z^{12}+z^{10}+z^8+z^6+z^4+z^2+1$ の値を求めよ。

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$ の値を求めよ。

アプローチ

$z^n=1$ より，1の n 乗根は，$z=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ と表せる。このとき，解は，1，z，z^2，……，z^{n-1} と表せる。また，単位円上に1，z，z^2，…，z^{n-1} の点をとるとそれらを頂点とする正 n 角形がかける。その正 n 角形の重心は対称性より原点になるので，$z^{n-1}+\cdots+z+1=0$ が成り立つ。

(1)では，z^nをド･モアブルの定理を用いて計算して，実数1となる場合は極形式の偏角が0になるときである。よって，三角関数の計算から，求める事ができる。

(2)では $z^7=1$ を利用して次数を7未満になるように下げ，上で言及した性質を利用して値を求める。

(3)では，複素数平面において，図形が対称になることに着目し，三角関数の性質を利用して計算する。

解答

(1) $z^n=\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)^n$

$=\cos\dfrac{2n\pi}{7}+i\sin\dfrac{2n\pi}{7}$

$1=\cos 0+i\sin 0$より $z^n=1$ のとき

$\cos\dfrac{2n\pi}{7}+i\sin\dfrac{2n\pi}{7}=\cos 0+i\sin 0$

したがって，k を整数とすると

$\dfrac{2n\pi}{7}=2k\pi \qquad n=7k$

n が最小の自然数となるのは $k=1$ のときで，このとき，$n=7$

(2) (1)より $z^7=1$ であるから

$z^{12}+z^{10}+z^8+z^6+z^4+z^2+1$

$=z^7\cdot z^5+z^7\cdot z^3+z^7\cdot z+z^6+z^4+z^2+1$

$=z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+1$

また $z^7=1$ より，$z^7-1=0$

$(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1$ より

$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$

(3) (2)より，$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ であるから，$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$ の実部は0である。

すなわち $\cos\dfrac{12\pi}{7}+\cos\dfrac{10\pi}{7}+\cos\dfrac{8\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}+1=0$

である。

$\cos\dfrac{12\pi}{7}=\cos\left(2\pi-\dfrac{2}{7}\pi\right)=\cos\dfrac{2}{7}\pi$

$\cos\dfrac{10\pi}{7}=\cos\left(2\pi-\dfrac{4}{7}\pi\right)=\cos\dfrac{4}{7}\pi$

$\cos\dfrac{8\pi}{7}=\cos\left(2\pi-\dfrac{6}{7}\pi\right)=\cos\dfrac{6}{7}\pi$

であるから

$\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}+1=0$

よって，$\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$

類題 1 次の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる数を求めよ。

(1) 複素数 z が，$z^3=1$，$z\neq 1$ を満たすとき，$(1-z)(1-z^2)=\boxed{\text{ア}}$，$\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{1-z^2}=\boxed{\text{イ}}$

(2) 複素数 z が，$z^5=1$，$z\neq 1$ を満たすとき，$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)=\boxed{\text{ウ}}$，

$\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{1-z^2}+\dfrac{1}{1-z^3}+\dfrac{1}{1-z^4}=\boxed{\text{エ}}$

入試例題 2　2次曲線の離心率による定義

xy平面において，原点Oと直線$x=2$からの距離の比が$\sqrt{r}:1$であるような点Pについて，次の問いに答えよ。

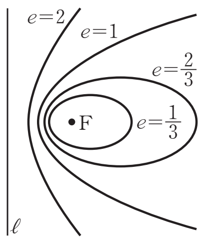
(1)　点Pの軌跡をCとするとき，曲線Cの方程式を求めよ。

(2)　$r=2$のとき，軌跡Cはどのような図形になるか答え，その軌跡の概形を描け。

(3)　軌跡Cが，長軸の長さが$\sqrt{5}$であるような楕円になるときのrの値を求めよ。

アプローチ

一般に，定点FとFを通らない定直線ℓの距離の比が$e:1(e>0)$の点Pの軌跡は，[1]$0<e<1$のときは楕円　[2]$e=1$のときは放物線　[3]$e>1$のときは双曲線となる。このeの値をその軌跡の離心率，直線ℓを準線と呼ぶ。



(1)　P$(x,\ y)$とおいて距離の比から関係式を導く。

(2)　(1)で求めた式に$r=2$を代入し，2次曲線の標準形の形に式変形する。
　　このとき，グラフの形や平行移動に注意して概形を描く。

(3)　楕円の標準形は$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$であるので，長軸の長さは$2a$となる。
　　これらを利用して，(1)の式からrを求める。解答の際は，楕円における離心率にも注意する。

解答

(1)　Pの座標を$(x,\ y)$とおくと，条件より

$$\sqrt{x^2+y^2}:|2-x|=\sqrt{r}:1$$

$$\sqrt{r}\,|2-x|=\sqrt{x^2+y^2}$$

両辺を平方して$r(x^2-4x+4)=x^2+y^2$

よって，曲線Cの方程式は

$$(r-1)x^2-4rx-y^2+4r=0$$

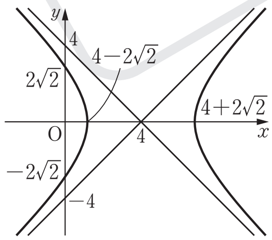
(2)　$r=2$を(1)の方程式に代入すると

$$x^2-8x-y^2+8=0$$

$$(x-4)^2-y^2=8$$

よって$\dfrac{(x-4)^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$

これは双曲線を表し，概形は図のようになる。



(3)　曲線Cが楕円を表すための必要条件は

$r-1<0$すなわち$r<1$

さらに，$\sqrt{r}$は実数であるから$r>0$

よって$0<r<1$

(1)の式を変形すると

$$(1-r)x^2+4rx+y^2-4r=0$$

$$(1-r)\left(x+\frac{2r}{1-r}\right)^2+y^2=4r+\frac{4r^2}{1-r}$$

$$(1-r)\left(x+\frac{2r}{1-r}\right)^2+y^2=\frac{4r}{1-r}$$

$$\frac{\left(x+\dfrac{2r}{1-r}\right)^2}{\dfrac{4r}{(1-r)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{4r}{1-r^2}}=1$$

ここで$\dfrac{4r}{(1-r)^2}-\dfrac{4r}{1-r}=\dfrac{4r^2}{1-r}>0$

$$\frac{4r}{(1-r)^2}>\frac{4r}{1-r}$$

よって，長軸の長さが$\sqrt{5}$である条件は

$$2\sqrt{\frac{4r}{(1-r)^2}}=\sqrt{5}$$

平方して整理すると$5r^2-26r+5=0$

$$(r-5)(5r-1)=0$$

よって$r=\dfrac{1}{5},\ 5$

$0<r<1$であるから$r=\dfrac{1}{5}$

類題2　点$(1,\ 0)$とy軸との距離の比が$1:r(r>0)$である点P$(x,\ y)$の軌跡の方程式，および軌跡とx軸との交点を求め，その軌跡の表す図形の概形をかけ。

入試発展演習

STEP 1

1 $\alpha=1-i$，$\beta=\sqrt{3}+i$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を極形式で表せ。ただし偏角θの範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(2) 自然数nに対し，$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n$の実部を$c_n$とする。$c_n\geqq10$ を満たす最小の自然数nと，そのときのc_nの値を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) 4次方程式 $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$ を解け。

(2) 複素数平面上の△ABCの頂点を表す複素数をそれぞれα，β，γとする。

$$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$$

が成り立つとき，△ABCはどのような三角形になるか答えよ。

3 次の問いに答えよ。

(1) $w^6=1$ を満たす複素数wをすべて求めよ。

(2) $\dfrac{1+z}{1-z}=\cos\theta+i\sin\theta\,(-\pi<\theta<\pi)$のとき，$z=\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)i$ であることを示せ。ただし，iは虚数単位である。

(3) $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^6=1$ を満たす複素数zをすべて求めよ。

4 次の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=mx+n$ が楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ に接するための条件をm，nを用いて表せ。

(2) 点(2，1)から楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ に引いた2つの接線が直交することを示せ。

(3) 楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の直交する2つの接線の交点の軌跡を求めよ。

5 θを媒介変数とする。$\begin{cases} x=\sqrt{5}\cos\theta \\ y=2\sin\theta-1 \end{cases}$ となる楕円Cを考える。次の問いに答えよ。

(1) 楕円Cをx，yの式で表せ。

(2) 点A$(0,\ 3)$から楕円Cに引いた2本の接線の方程式を求めよ。

(3) $p>1$となる点B$(0,\ p)$から楕円Cに引いた2本の接線が直交するとき，pの値を求めよ。

STEP 2

1 実数tに対して複素数$z=\dfrac{-1}{t+i}$を考える。ただし，iは虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) zの実部と虚部をそれぞれtを用いて表せ。

(2) 絶対値$\left|z-\dfrac{i}{2}\right|$を求めよ。

(3) 実数tが$-1\leqq t\leqq 1$の範囲を動くとき，点zはどのような図形を描くか，複素数平面上に図示せよ。

2 複素数α，β，γが$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$かつ$\alpha+\beta+\gamma=0$を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) α，β，γを表す複素数平面上の点が正三角形をなすことを示せ。

(2) $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}+\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\dfrac{\gamma\alpha}{\beta^2}$の値を求めよ。

(3) nを3で割り切れない自然数とするとき$\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$の値を求めよ。

3 aを正の実数とし，双曲線$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$と直線$y=\sqrt{a}\,x+\sqrt{a}$が異なる2点P，Qで交わっているとする。線分PQの中点をR$(s,\ t)$とする。次の問いに答えよ。

(1) aのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) s，tの値をaを用いて表せ。

(3) aが(1)で求めた範囲を動くときにsのとりうる値の範囲を求めよ。

(4) tの値をsを用いて表せ。

4 座標平面上に円$C：x^2+y^2=4$と点P$(6,\ 0)$がある。円C上を点A$(2a,\ 2b)$が動くとき，線分APの中点をMとし，線分APの垂直二等分線をℓとする。次の問いに答えよ。

(1) 点Mの軌跡の方程式を求め，その軌跡を図示せよ。

(2) 直線ℓの方程式をa，bを用いて表せ。

(3) 直線ℓが通過する領域を表す不等式を求め，その領域を図示せよ。